4. **Грамматин А. П., Федорова О. Н.** Объектив для голографического запоминающего устройства.— ОМП, 1978, № 4, с. 67.
5. **Соскин С. И., Шойдин С. А.**— «Опт. и спектр.», 1978, т. 44, вып. 3, с. 566.
6. **Hill B.** Some aspects of a large capacity holographic memory.— "Appl. Opt.", 1972, vol. 11, N 1, p. 182.

Поступила в редакцию 17 августа 1978 г.

УДК 621.391.23 : 621.376.56

Ю. В. ЗАХАРОВ, Е. А. СИДОРОВ

(Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕДЫСКАЖЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ СООБЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ С ИМПУЛЬСНО-КОДОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Рассмотрим канал последовательного (по терминологии Железнова [1]) анализа непрерывных сообщений, схема которого изображена на рис. 1.

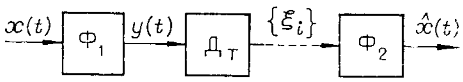

Рис. 1.

Реализация $x(t)$ центрированного стационарного случайного процесса $X(t)$ с известной функцией корреляции $K(\tau)$ поступает на предыскажающий фильтр Φ_1 с импульсной характеристикой $g(t)$. Дискретизатор $Д_T$ преобразует сигнал $y(t)$ в последовательность отсчетов $\{\xi_i\}$, следующих с равным промежутком времени T. Эти отсчеты будем называть координатами сообщения $x(t)$. Последовательность координат $\{\xi_i\}$ поступает на вход восстанавливающего фильтра Φ_2 с импульсной характеристикой $f(t)$. На выходе этого фильтра образуется оценка $\hat{x}(t)$ непрерывного сообщения $x(t)$.

Данная схема приближенно описывает алгоритм работы системы с импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ). Приближение заключается в том, что в ней не учитываются шум квантования координат ξ_i и искажения этих координат в канале связи.

За меру близости $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ примем интегральную среднеквадратическую ошибку

$$\delta^2 = \frac{1}{\sigma^2 T}\int_0^T E\{[X(t) - \hat{X}(t)]^2\}\,dt,$$

где σ^2 — дисперсия процесса $X(t)$; E — символ математического ожидания.

Сигнал на выходе Φ_1 запишется следующим образом:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Тогда i-я координата сообщения $x(t)$ будет равна значению $y(t)$ в момент времени $t=iT$:

$$\xi_i = y(iT) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(iT-\tau)\, d\tau.$$

Восстановленное сообщение $\hat{x}(t)$ представляет собой реакцию фильтра Φ_2 на последовательность координат $\{\xi_i\}$:

$$\hat{x}(t) = \sum_i \xi_i f(t-iT).$$

Задача ставится следующим образом. Пусть процесс $X(t)$ известен с точностью до вторых моментных функций и задан способ восстановления реализаций $x(t)$ этого процесса по дискретным координатам ξ_i. Требуется найти такой предыскажающий фильтр Φ_1, который доставляет минимум ошибке δ^2.

Покажем, что необходимым и достаточным условием минимума ошибки δ^2 при заданной импульсной характеристике $f(t)$ восстанавливающего фильтра Φ_2 является выполнение равенства

$$f(-t) = \sum_m \sum_n A_{mn} g(t+mT-nT), \tag{1}$$

где

$$A_{mn} = \int_0^T f(t-mT) f(t-nT) dt, m, n=0;\ \pm 1;\ \pm 2 \ldots$$

Перейдем к доказательству этого утверждения. Выразим ошибку δ^2 через функцию корреляции $K(\tau)$. После соответствующих преобразований можно получить

$$\delta^2 = 1 - \frac{2}{\sigma^2 T} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) f(-t)\, g(\tau)\, dt d\tau +$$

$$+\frac{1}{T\sigma^2}\sum_m\sum_n A_{mn}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, g(mT-t)\, g(nT-\tau)\, dt d\tau. \tag{2}$$

Рассматривая это выражение как функционал вида $\delta^2 = \Phi\{g(t)\}$, исследуем его на минимум. Эту вариационную задачу можно решить следующим образом [2].

Пусть функция $g(t)$ доставляет минимум ошибке δ^2, равный δ_0^2; тогда ошибка δ_1^2, соответствующая функции $g(t)+\lambda\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная функция, а λ — постоянный коэффициент, будет во всяком случае удовлетворять неравенству

$$\delta_1^2 - \delta_0^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Это неравенство после подстановки в него (2) преобразуется к виду

$$\frac{\lambda^2}{\sigma^2 T}\sum_m\sum_n A_{mn}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)\, \varphi(mT-t)\, \varphi(nT-\tau)\, dt d\tau +$$

$$+\frac{2\lambda}{\sigma^2 T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau)\left[\sum_m\sum_n A_{mn}\,g(mT-t)\,\varphi(nT-\tau)-\right.$$

$$\left.-f(-t)\,\varphi(\tau)\right]dt\,d\tau\geqslant 0. \qquad (4)$$

Ясно, что при любом значении λ выражение (4) должно быть неотрицательным. Но при достаточно малых λ знак его совпадает со знаком второго слагаемого. Переменив знак λ, мы тем самым переменим знак всего выражения. Но условие неотрицательности должно выполняться для любых λ, поэтому необходимо, чтобы было справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau)\left[\sum_m\sum_n A_{mn}g(mT-t)\,\varphi(nT-\tau)-f(-t)\,\varphi(\tau)\right]dt\,d\tau=0,$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\left[\sum_m\sum_n A_{mn}g(t+mT-nT)-f(-t)\right]dt\,d\tau=0.$$

Так как $\varphi(\tau)$ — произвольная функция, то отсюда вытекает, что

$$f(-t)=\sum_m\sum_n A_{mn}g(t+mT-nT).$$

С другой стороны, если условие (1) выполнено, то из него автоматически следует выполнение условия (3), потому что первое слагаемое в неравенстве (4) не может быть отрицательным, в чем нетрудно убедиться, если представить это слагаемое в следующем виде:

$$\frac{\lambda^2}{\sigma^2 T}\int\limits_0^T E\left\{\left[\sum_n f(t-nT)\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\varphi(nT-\tau)\,d\tau\right]^2\right\}dt.$$

Таким образом, выполнение соотношения (1) — необходимое и достаточное условие минимума ошибки δ^2, что и требовалось доказать.

Из доказанного утверждения следует, что импульсная характеристика $f(t)$ восстанавливающего фильтра должна представлять собой линейную комбинацию функций, полученных смещением импульсной характеристики $g(t)$ предыскажающего фильтра на интервалы, кратные T, причем коэффициенты A_{mn} зависят от самой функции $f(t)$. Если подставить (1) в (2), то получим выражение для минимума ошибки δ_0^2:

$$\delta_0^2=1-\frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(t-\tau)\,f(-t)\,g(\tau)\,dt\,d\tau, \qquad (5)$$

где $\rho(\tau)=K(\tau)\sigma^2$ — нормированная корреляционная функция процесса $X(t)$.

Из формулы (1) следует, что если функция $f(t)$ задана на интервале T и обращается в нуль вне этого интервала, то $g(t)$ можно представить следующим образом:

$$g(t)=\frac{f(-t)}{\int\limits_T f^2(t)\,dt}. \qquad (6)$$

Тогда выражение (5) для минимума ошибки δ_0^2 принимает такой вид:

$$\delta_0^2 = 1 - \frac{1}{T} \int\limits_T \int\limits_T \rho(t-\tau) f(-t) g(\tau)\, dt d\tau. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) были получены в работе [1], здесь же они являются очевидными следствиями из (1) и (5). Следует также отметить, что в соотношение (1) не вошла корреляционная функция $K(\tau)$, это значит, что предыскажающий фильтр, импульсная характеристика которого находится из (1), остается оптимальным в указанном выше смысле для стационарного процесса с любой корреляционной функцией. Для практических расчетов интересна связь между передаточными функциями фильтров Φ_1 и Φ_2. Эту связь нетрудно установить, если применить преобразование Фурье к равенству (1):

$$G(\omega) = \frac{F(-\omega)}{\sum\limits_m \sum\limits_n A_{mn} e^{j\omega T(m-n)}}. \tag{8}$$

Выражение для ошибки (5) преобразуется к виду

$$\delta_0^2 = 1 - \frac{1}{2\pi T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\omega) F(\omega) G(\omega)\, d\omega. \tag{9}$$

В этих соотношениях $R(\omega)$, $F(\omega)$ и $G(\omega)$ — преобразования Фурье функций $\rho(t)$, $f(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих практическую ценность полученных соотношений.

1. Пусть восстановленное сообщение получают методом симметричной ступенчатой интерполяции. В этом случае функция $f(t)$ имеет вид, показанный на рис. 2. Для такой функции $f(t)$ справедливо (6), откуда видно, что $g(t) = f(t)/T$, т. е. фильтр Φ_1 в этом случае является интегратором со сбросом, у которого интервал интегрирования равен T.

Этот результат был получен в работе [1], а в [3] проведено сравнение ошибки этого метода с ошибкой обычной ступенчатой интерполяции для процессов с различными корреляционными функциями. Сравнение показывает, что оптимальное предыскажение при такой функции $f(t)$ дает уменьшение ошибки, но это уменьшение незначительно.

2. Восстановление производится методом линейной интерполяции. Функция $f(t)$ показана на рис. 3. Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$f(t) = 2Tg(t)/3 + Tg(t-T)/6 + Tg(t+T)/6.$$

Нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция «осциллирующий треугольник», показанная на рис. 4. Эта функция непрерывна, симметрична относительно точки $t=0$ и представляет собой отрезки прямых линий на элементарных интервалах $[nT, nT+T]$,

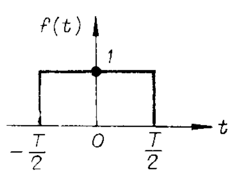

Рис. 2.

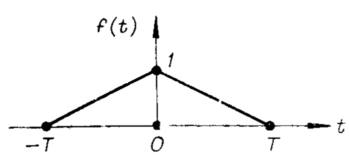

Рис. 3.

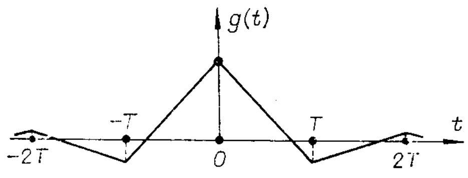

Рис. 4.

где n — целое. Значения функции $g(t)$ на границах интервалов вычисляются по формуле

$$g(iT)=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|i|}T,$$
$$i=0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ \ldots .$$

Найдем теперь, чему равна в этом случае ошибка δ_0^2, например, для процесса с прямоугольным спектром. Пусть

$$R(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\alpha}, & \text{если} \quad |\omega|\leqslant\alpha;\\ 0, & \text{если} \quad |\omega|>\alpha.\end{cases}$$

Запишем преобразование Фурье функции $f(t)$:

$$F(\omega)=2(1-\cos\omega T)/(\omega^2 T).$$

Используя (8), найдем

$$G(\omega)=\frac{6(1-\cos\omega T)}{\omega^2T^2(2+\cos\omega T)}.$$

Далее подставляем значения $R(\omega)$, $G(\omega)$ и $F(\omega)$ в (9); в результате получим

$$\delta_0^2=1-\frac{3}{\alpha T}\int\limits_0^{\alpha T}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\frac{dx}{2+\cos x}.$$

Если принять $\alpha T<1$, что справедливо для точных систем, то интеграл в выражении для δ_0^2 легко вычисляется и окончательно имеем

$$\delta_0^2\cong\frac{(\alpha T)^4}{5\cdot 6!}.$$

В работе [3] получена формула для вычисления ошибки δ^2 в случае отсутствия предыскажения:

$$\delta^2\cong(\alpha T)^4/(5\cdot 5!).$$

Видно, что для процесса с прямоугольным спектром использование оптимального предыскажающего фильтра позволяет уменьшить ошибку δ^2 примерно в 6 раз по сравнению со способом, применяющим линейную интерполяцию по равноотстоящим выборкам самого процесса $x(t)$.

В заключение следует отметить, что при выводе соотношения (1) никаких ограничений на физическую осуществимость фильтра Φ_1 не накладывалось. Поэтому ошибку (5) следует считать потенциальной. Полученные соотношения позволяют синтезировать предыскажающие фильтры и оценить эффективность введения предыскажений в передаваемые сообщения для всех практически важных способов восстановления сообщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Железнов Н. А.** Некоторые вопросы теории информационных электрических систем. Л., изд. ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1960.
2. **Брин И. А.** Некоторые вопросы теории стационарных случайных функций. М., изд. МЭИ. 1969.
3. **Борисов В. А., Сидоров Е. А.** Ошибки восстановления стационарных процессов с произвольной функцией корреляции по дискретным координатам.— «Труды МЭИ», 1975. вып. 230, с. 68—71.

Поступила в редакцию 3 января 1978 г.

УДК 621.396.969.11

В. В. МИСЬКИВ, Г. И. СКРЫПНИК

(Львов — Москва)

О ВЫБОРЕ ЧИСЛА ШКАЛ И СООТНОШЕНИЙ МАСШТАБОВ В МНОГОШКАЛЬНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

1. При создании радиоинтерферометрических устройств, предназначенных для определения расстояния или направления, возникает задача синтеза многошкальной измерительной системы. Эта задача заключается в выборе числа шкал и соотношений масштабов по критериям точности измерений и надежности раскрытия неоднозначности фазовых отсчетов при различных конструктивных ограничениях [1—3]. Исходная информация о системе задается в виде неполной линейной системы целочисленных уравнений:

$$x = \frac{k_1 + \varphi_1}{d_1} = \ldots = \frac{k_i + \varphi_i}{d_i} = \ldots = \frac{k_m + \varphi_m}{d_m},$$

где x — определяемый параметр (дальность или направляющий косинус), принимающий значение из интервала $[a, b)$; $k_i = [d_i x]^+$ и $\varphi_i = \{d_i x\}^+$ — соответственно целая и дробная части фазы $\Phi_i = d_i x$; d_i — масштабный коэффициент i-й шкалы; $d_m (d_m > d_l,\ l \neq m)$ — внешний масштаб системы; m — число шкал. Наблюдаемые значения дробных частей фазы $\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$ в общем случае содержат случайные ошибки измерений

$$\psi_i = \{\hat{\varphi}_i - \varphi_i + 1/2\}^+ - 1/2, \quad i = \overline{1, m},$$

с известной совместной плотностью вероятностей $G(\psi) = W(\psi_1, \ldots, \psi_m)$. Следуя [4], представим оценку величины x по шкале с наибольшим масштабом в следующем виде:

$$x_m = (n_m + \hat{\varphi}_m - \xi_m)/d_m, \tag{1}$$

где $n_m = k_m + \delta k_m$ — целое число циклов; $\delta k_m = [\varphi_m + \psi_m]^+$ — перебросы фазы на ± 1 цикл, вызываемые ошибкой ψ_m; неизвестный параметр $\xi_m = \xi_m(\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_m)$, принимающий значения в интервале $[-1/2, 1/2)$, введен для уточнения $\hat{\varphi}_m$. Для определения параметров n_m, ξ_m обычно используется метод максимального правдоподобия. Как показано в [4], задача оптимизации функции правдоподобия $L(x)$ может быть сведена в рассматриваемом случае к смешанной непрерывно-дискретной