ЛИТЕРАТУРА

1. **Карпова О. М., Нежевенко Е. С., Уманцев Г. Д.** Распознавание изображений известной формы на фотоснимках.— «Автометрия», 1975, № 3, с. 68—72.
2. **Козлов О. А., Нежевенко Е. С., Потатуркин О. И.** Распознавание изображений в когерентно-оптических системах с применением контурных эталонов.— «Автометрия», 1976, № 6, с. 36—44.
3. **Никитин Я. Ю., Филимонов Р. П., Шубина Е. П.** Расчет асимптотической относительной эффективности некоторых инвариантных правил обнаружения в схеме двухканальной обработки.— «Автометрия», 1978, № 2, с. 51—57.
4. **Bahadur R. R.** Stochastic comparison of tests.— "Ann. Math. Stat.", 1960, vol. 31, p. 276—295.
5. **Wieand H. S.** A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide.— "Ann. of Stat.", 1976, vol. 4, p. 1003—1011.
6. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. P. I, II.— "Biometrika", 1961, vol. 48, p. 109—114; 1962, vol. 49, p. 57—63.
7. **Mann H. B., Whitney D. R.** On a test whether one of the two random variables is stochastically larger than the other.— "Ann. Math. Stat.", 1947, vol. 18, p. 50—60.
8. **Смирнов Н. В.** Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках.— «Бюл. МГУ, сер. А», 1939, т. 2, с. 3—14.
9. **Rosenblatt M.** Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic.— "Ann. Math. Stat.", 1952, vol. 23, p. 617—623.
10. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М., «Наука», 1973.
11. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
12. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 3. М., «Сов. радио», 1976.
13. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2. М., «Сов. радио», 1975.
14. **Прокофьев В. Н.** Инвариантное правило некогерентного обнаружения сигнала на фоне шумов неизвестного уровня.— «Радиотехника и электроника», 1973, т. XVIII, вып. 3, с. 547—553.

Поступила в редакцию 17 июля 1978 г.;
окончательный вариант — 30 ноября 1978 г.

УДК 519.27 : 621.391.2

Л. М. КЕНИН

(Воронеж)

АЛГОРИТМ СВЕРХЭФФЕКТИВНОЙ ОЦЕНКИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Проблема оценки параметров сигнала на фоне помех и получения эффективных алгоритмов обработки особенно остро стоит в случае малых отношений сигнал/помеха (С/П) и малых объемов выборки.

Существующие методы оценки, например метод максимального правдоподобия, в этих условиях не являются эффективными. При малых отношениях С/П и малых объемах выборки может произойти смещение оценки и дисперсия оценки может отличаться от нижней границы дисперсии оценки, определяемой неравенством Рао — Крамера, как в случае оценки параметров распределения случайной величины [1, 2], так и для параметров случайного процесса [3].

Известны сверхэффективные оценки [1, 4], имеющие дисперсию в ограниченном диапазоне значений измеряемого параметра ниже, чем это следует из неравенства Рао — Крамера; такие оценки возможны при разрывных функциях распределения случайной величины или при разрывных зависимостях оценки от данных наблюдения [4]. Однако на практике эффективные и сверхэффективные оценки важно иметь для наиболее распространенных ситуаций.

В статье рассматривается алгоритм оценки в случаях, где имеется или может быть получена разрывная зависимость данных наблюдения от вспомогательного параметра $y_п(q)$, являющегося функцией искомого параметра и обеспечивающего разделения множества данных наблюдения на два подмножества:

$$\int\limits_{Y_1} W(y/q)\ln\frac{W(y/q)}{W(y/q_0)}dy - \int\limits_{Y_2} W(y/q)\ln\frac{W(y/q)}{W(y/q_0)}dy =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{y_i\in Y_1}\ln\frac{W(y_i/q)}{W(y_i/q_0)} - \frac{1}{n}\sum_{y_i\in Y_2}\ln\frac{W(y_i/q)}{W(y_i/q_0)}; \tag{1}$$
$$y_i \in Y_1, \quad \text{если} \quad y_i > y_п(q);$$
$$y_i \in Y_2, \quad \text{если} \quad y_i < y_п(q),$$

где $W(y/q)$, $W(y/q_0)$ — условная плотность распределения вероятностей случайной величины при наличии сигнала и помехи и только помехи соответственно; $\ln(W(y_i/q)/W(y_i/q_0))$ — логарифм отношения правдоподобия для однократного независимого отсчета наблюдаемой случайной величины y (частное количество информации по Кульбаку [5]).

Рассмотрим алгоритм (1), когда уровень разделения данных наблюдения находится из условия, что информация [5], содержащаяся в точке $y_п$ для различения в пользу q против q_0, не разрушается, т. е.

$$\ln(W(y_п/q)/W(y_п/q_0))=0.$$

В этом случае выражение (1) упрощается и заключается в нахождении среднеарифметического значения модуля частных количеств информации и в сравнении его с абсолютным средним значением информации $J(q)$, приходящимся на элемент выборки и являющимся функцией искомого параметра. Оценка параметра $u=q_k$ принимается по моменту равенства левой и правой части выражения

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln\frac{W(y_i/q_k)}{W(y_i/q_0)}\right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(y/q_k)\left|\ln\frac{W(y/q_k)}{W(y/q_0)}\right|dy = J(q_k). \tag{2}$$

Наблюдаемые значения y_i — смесь сигнала и помехи, причем вероятность наличия сигнала равна единице. Условная плотность вероятностей случайной величины y при отсутствии сигнала $W(y/q_0)$ известна до наблюдения. Поэтому эту условную плотность, соответствующую начальной точке диапазона оцениваемого параметра $q_0=0$, можно рассматривать как априорную, относительно которой вычисляется вся информация об искомом параметре. Такая мера информации удобна при измерении энергетических параметров нормированного распределения, например [6], при измерении нормированной амплитуды сигнала $q=A/\sigma$, где A — амплитуда сигнала, σ — среднеквадратическое значение напряжения помехи. В этом случае обеспечивается однозначная возрастающая зависимость количества информации от величины q.

В принципе в качестве априорного уровня может быть взята условная плотность вероятностей, соответствующая начальной точке $q\neq0$. Однако абсолютная величина информации при фиксированном значении искомого энергетического параметра будет меньше, что снижает потенциально достижимую точность измерения [6].

Определим величину дисперсии оценки параметра в соответствии с выражением (2). Для того чтобы выразить дисперсию оценки параметра информации $D\{u(y_1, \ldots, y_n)\}$ через дисперсию оценки абсолютного среднего значения информации $D\{J_n(u)\}$, требуется сравнить в окрестности истинного значения параметра q_l дисперсии оценок выражений, связанных с функцией $J(q)$ следующим неравенством:

$$J(q) \geqslant J(q_l) + (q - q_l) J'(q)_{q=q_l} + \frac{(q-q_l)^2}{2} J''(q)_{q=q_l} \geqslant$$
$$\geqslant J(q_l) + (q - q_l) J'(q)_{q=q_l}. \tag{3}$$

Можно убедиться, что в диапазоне малых значений параметра $(q<1)$ по мере более точной аппроксимации вогнутой кривой $J(q)$ дисперсия оценки соответствующего выражения уменьшается. Поэтому

$$D\{J_n(u)\} \leqslant D\{J(q_l) + (u - q_l) J'(q)_{q=q_l}\}. \tag{4}$$

На основании неравенства (4) в окрестности q_l дисперсию оценки можно записать как

$$D\{u(y_1, \ldots, y_n)\} \geqslant \frac{D\{J_n(u)\}}{[J'(q)]^2_{q=q_l}}. \tag{5}$$

В выражении (5)

$$D\{J_n(u)\} = D\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln\frac{W(y_i/u)}{W(y_i/q_0)}\right|\right\} = \frac{1}{n} D\left\{\left|\ln\frac{W(y/u)}{W(y/q_0)}\right|\right\}. \tag{6}$$

Поэтому с учетом (6) дисперсия оценки параметра будет иметь вид

$$D\{u(y_1, \ldots, y_n)\} \geqslant \frac{D\left\{\left|\ln\frac{W(y/u)}{W(y/q_0)}\right|\right\}}{n[J'(q)]^2_{q=q_l}}. \tag{7}$$

Полученное выражение зависит от оценки u. Усредним (7) по всем возможным значениям этой переменной. Для этого воспользуемся результатами работы [6], где рассмотрена задача получения оптимальной условной плотности оценки $W(u/y_1, \ldots, y_n; q)$ из условия наилучшего использования информации в процессе решения, т. е. из условия равенства информации, содержащейся в выборке объемом n—$J_n(y/q)$, и информации, используемой в процессе решения,— $J_n(u/y; q)$.

В [6] показано, что для класса достаточных оценок применение оптимального нерандомизированного правила решения при условии $J_n(y/q) = J_n(u/y; q)$ приводит к оценке параметра в соответствии с алгоритмом (2). Поскольку при такой оценке нет потерь информации в точке $u(y_1, \ldots, y_n) = q$, то можно записать

$$\overline{J_n(u)} = \int_{u\in U} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln\frac{W(y_i/u)}{W(y_i/q_0)}\right| \delta[u(y_1, \ldots, y_n) - q]\, du =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln\frac{W(y_i/q)}{W(y_i/q_0)}\right| = J_n(q) \tag{8}$$

и соответственно

$$\overline{D\left\{\left|\ln\frac{W(y/u)}{W(y/q_0)}\right|\right\}} = \int_{u\in U} D\left\{\left|\ln\frac{W(y/u)}{W(y/q_0)}\right|\right\} \times$$
$$\times \delta[u(y_1, \ldots, y_n) - q]\, du = D\left\{\left|\ln\frac{W(y/q)}{W(y/q_0)}\right|\right\}. \tag{9}$$

С учетом (9) дисперсия оценки окончательно примет вид

$$\overline{D\{u(y_1, \ldots, y_n)\}} \geqslant \frac{D\left\{\left|\ln \frac{W(y/q)}{W(y/q_0)}\right|\right\}}{n\,[J'(q)]^2_{q=q_l}}. \qquad (10)$$

Таким образом, дисперсия оценки параметра в окрестности q_l может достигать величины, определяемой отношением дисперсии модуля логарифма отношения правдоподобия для однократного отсчета к объему выборки n и квадрату производной количества информации $J(q)$.

В соответствии с определением несмещенной оценки [2] среднеарифметическое значение модулей частных количеств информации является несмещенной оценкой абсолютного среднего значения информации, так как

$$m\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln \frac{W(y/q)}{W(y/q_0)}\right|\right\} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int}_{n} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\ln \frac{W(y_i/q)}{W(y_i/q_0)}\right| W(y_1, \ldots, y_n/q)\times$$

$$\times dy_1 \ldots dy_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\ln \frac{W(y_i/q)}{W(y_i/q_0)}\right| W(y_i/q)\,dy_i = J(q),$$

причем при этом обеспечивается и несмещенность оцениваемого параметра.

Из сравнения (10) с неравенством Рао — Крамера для несмещенных оценок следует, что в тех случаях, когда квадрат производной среднего значения $[J'(q)]^2$ равен количеству информации по Фишеру, оценка будет сверхэффективной при условии, что $D\{|\ln(W(y/q)/W(y/q_0))|\}<1$.

Рассмотрим требуемые условия для случая оценки параметра $q=A/\sigma$ обобщенного рэлеевского распределения нормированной случайной величины $v=r/\sigma$:

$$W(v/q) = \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2+q^2}{2}} I_0(vq), \quad v \geqslant 0.$$

Абсолютное среднее значение информации при $q \leqslant 3$ аппроксимируется простой зависимостью от параметра

$$J(q) = \int_0^{\infty}\left|\ln \frac{W(v/q)}{W(v/q_0)}\right| W(v/q)\,dv = \frac{q^2}{e},$$

где $e=2{,}7182\ldots$ Погрешность аппроксимации в интервале $q=0{,}05\div3$ не превышает 1,5%, причем при $q\ll1$ эти ошибки уменьшаются и оказываются соизмеримыми с ошибками вычисления на ЭВМ.

Дисперсия оценки в соответствии с (10) определяется выражением

$$\overline{D(u)} \geqslant \frac{\int_0^{\infty}\left\{\left|\ln e^{-\frac{q^2}{2}} I_0(vq)\right| - \frac{q^2}{e}\right\}^2 v e^{-\frac{v^2+q^2}{2}} I_0(vq)\,dv}{n\left(\frac{2q}{e}\right)^2}. \qquad (11)$$

Нижняя граница неравенства Рао — Крамера в случае независимых выборочных значений [2] вычислялась на ЭВМ на основании

Таблица 1

q	0,3	0,5	0,7	1,0	2,0

выражения

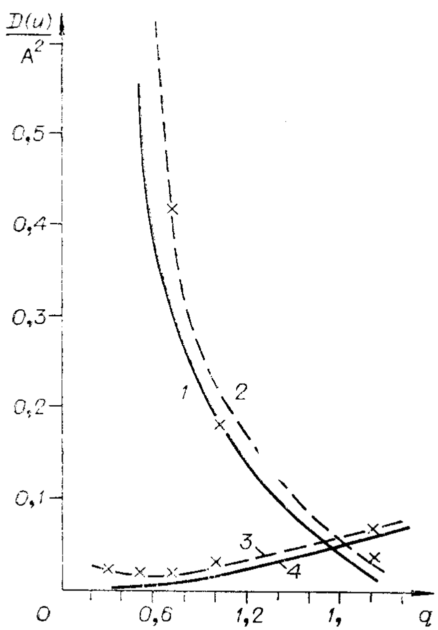
$$\frac{1}{nJ_1}=\frac{1}{n\int\limits_0^\infty\left[\frac{\partial\ln W(v/q)}{\partial q}\right]^2 W(v/q)\,dv}=\frac{1}{n\int\limits_0^\infty\left[\frac{I_1(vq)}{I_0(vq)}v-q\right]^2 W(v/q)\,dv}. \qquad (12)$$

Результаты расчета в соответствии с (11) и (12) приведены в табл. 1 и на рисунке (кривые *1*, *4*) при $n=10$. Как видно из рисунка, величина дисперсии, вычисленная в соответствии с выражением (11), при $q<1{,}7$ оказывается меньше величины, определяющей нижнюю границу эффективных оценок. Поскольку выражение (11) характеризует дисперсию оценки снизу, то для проверки правильности выводов о диапазоне сверхэффективных оценок было проведено экспериментальное сравнение методом статистического моделирования оценок по разработанному алгоритму и по максимуму логарифма отношения правдоподобия.

Для экспериментальной проверки алгоритма на ЭВМ М-220 нами формировались случайные величины с обобщенным рэлеевским законом.

Случайные числа $v_i(i=1, \ldots, 100)$ при фиксированном значении параметра последовательно поступали в блок вычисления, где для каждых десяти выборочных значений $n_k(k=1, \ldots, 10)$ вычислялись суммы логарифмов отношения правдоподобия (1-й вариант). Поиск максимума осуществлялся последовательным перебором значений оценок параметра от 0 до 5,0 с шагом $\Delta=0{,}05$; после окончания цикла расчета оценки по первым десяти выборочным значениям начинался второй цикл и т. д.; в результате получено 10 значений оценок параметра распределения. Далее изменялся параметр обобщенного рэлеевского распределения и процедура вычисления оценки повторялась; в эксперименте параметр обобщенного рэлеевского распределения принимал пять фиксированных значений: $q=0{,}3$; 0,5; 0,7; 1,0; 2,0.

Аналогично при тех же объемах выборки и при тех же значениях слу-



Теоретические и экспериментальные характеристики:

1 — нижняя граница неравенства Рао — Крамера; *2* — экспериментальная зависимость относительной дисперсии оценки по максимуму правдоподобия; *3* — экспериментальная зависимость относительной дисперсии оценки по разработанному алгоритму; *4* — теоретическая зависимость дисперсии оценки по разработанному алгоритму.

Таблица 2

q	0,3	0,5	0,7	1,0	2,0	Примечание
$m(u)$ $D(u)$	0,295 0,0022	0,49 0,0049	0,68 0,0106	0,96 0,0399	2,07 0,2826	Разработанный алгоритм
$m(u)$ $D(u)$	0,37 0,2079	0,47 0,2056	0,65 0,205	0,96 0,1794	1,98 0,1571	Максимум логарифма отношения правдоподобия

чайных чисел в каждой выборке вычислялась оценка по разработанному алгоритму (2-й вариант).

На основе результатов, полученных для каждого цикла, вычислялись средние характеристики: среднеарифметическое значение оценки

$$m(u)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}u_i;$$

средняя величина дисперсии оценок

$$D(u)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[u_i-m(u)]^2.$$

Результаты вычисления приведены в табл. 2 и учтены на рисунке.

Как видно из рисунка (кривые *2*, *3*), дисперсия оценки по максимуму логарифма отношения правдоподобия при $q>1{,}7$ оказалась меньше, чем для разработанного алгоритма. Однако с уменьшением значения искомого параметра лучшей стала оценка по разработанному алгоритму. Полученные результаты подтверждают выводы о сверхэффективной оценке малых значений параметра распределения на основании алгоритма (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Закс Ш.** Теория статистических выводов. М., «Мир», 1975.
2. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. М., «Сов. радио», 1968.
3. **Смертинюк И. В.** Об одном нелинейном методе обработки экспериментальных данных с использованием гауссовых статистик.— «Автометрия», 1974, № 2, с. 3—10.
4. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений. М., «Сов. радио», 1976.
5. **Кульбак С.** Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967.
6. **Кремер И. Я., Кенин Л. М., Федоров Е. И.** Информационно-ценностный подход к оценке характеристик случайных сигналов и их смесей.— В кн.: Тезисы докладов X Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных сигналов и полей» (г. Сухуми). Л., изд. ВНИИЭП, 1978.

Поступила в редакцию 12 января 1977 г.;
окончательный вариант — 14 июня 1977 г.