ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ АППАРАТУРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ АЛГОРИТМА БПФ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ КВАНТОВАНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Предложенные в работах [1, 2] методы оценки аппаратурных погрешностей алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), обусловленных квантованием весовых коэффициентов Фурье (ВКФ), необходимы для оптимального выбора длины регистра в цифровых процессорах БПФ. Однако эти методы справедливы лишь для ограниченного класса сигналов — для сигналов типа белого шума и узкополосных процессов. В данной же работе предлагается простой метод оценки рассматриваемых погрешностей, адекватный для широкого класса анализируемых сигналов.

Представим процесс вычисления n-го спектрального компонента по сигнальному графу БПФ с учетом погрешности квантования ВКФ в виде

$$\widetilde{S}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \prod_{m=0}^{\gamma-1} (W_{mnk} + \Delta W_{mnk}), \tag{1}$$

где $\gamma = \log_2 N$ — число итераций БПФ; m, n, k — индексы, означающие, что комплексный ВКФ W_{mnk} формируется на m-й итерации при вычислении n-го спектрального компонента из k-го временного отсчета входного массива; ΔW_{mnk} — погрешность представления ВКФ. Полагая $|W_{mnk}| \gg |\Delta W_{mnk}|$ и пренебрегая величинами второго порядка малости, найдем путем преобразований (1) выражение для погрешности $\Delta S(n)$, обусловленной квантованием ВКФ:

$$\Delta S(n) = \widetilde{S}(n) - S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \left[\sum_{m=0}^{\gamma-1} \frac{\Delta W_{mnk}}{W_{mnk}} \right], \tag{2}$$

где $S(n)$ — точный результат БПФ. Отношение $\Delta W_{mnk}/W_{mnk}$ в выражении (2) является комплексной аддитивной составляющей погрешности ВКФ, возникающей на m-й итерации БПФ. Сумма в квадратных скобках в (2) — результирующая относительная погрешность представления ВКФ.

Считая погрешность ΔW_{mnk} случайной величиной с нулевым средним, найдем дисперсию погрешности $\Delta S(n)$:

$$D\{\Delta S(n)\} = M\{\Delta S(n)\, \Delta S^*(n)\} = M\left\{\left[\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \sum_{m=0}^{\gamma-1} \frac{\Delta W_{mnk}}{W_{mnk}}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \sum_{m=0}^{\gamma-1} \frac{\Delta W^*_{mnk}}{W^*_{mnk}}\right]\right\}. \tag{3}$$

Произведения внешних, а затем внутренних сумм в (3) представим в виде двойных сумм и, учитывая линейность операции математического ожидания, получим

$$D\{\Delta S(n)\} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} f(k) f(q)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} e^{j\frac{2\pi nq}{N}} \sum_{m=0}^{\gamma-1} \sum_{r=0}^{\gamma-1} M\left\{\frac{\Delta W_{mnk}}{W_{mnk}} \frac{\Delta W^*_{rnq}}{W^*_{rnq}}\right\}. \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$M\left\{\frac{\Delta W_{mnk}}{W_{mnk}}\frac{\Delta W^*_{rnq}}{W^*_{rnq}}\right\} \tag{5}$$

из (4) представляет собой коэффициент корреляции между составляющими погрешности, которые вносятся на итерациях m и r, при вычислении n-го спектрального компонента по отсчетам k и q исходного массива $\{f(k)\}_0^{N-1}$.

Рассмотрим предлагаемый метод применительно к цифровой реализации процессора БПФ с арифметикой с фиксированной запятой, учитывая при этом, что полученные результаты могут быть распространены без нарушения общности и на гибридную реализацию [3] процессора БПФ.

Полагаем, что формирование массива ВКФ производится в процессоре БПФ одним устройством, например постоянной памятью, и составляющие погрешности ΔW_{mnk} и ΔW^*_{rnq} коррелированы (выражение (5) не равно нулю, если $W_{mnk}=W^*_{rnq}$). В этом случае конкретный исход (5) зависит от структуры алгоритма БПФ и переменных n, m, r, k, q.

Введем обозначения:

$$M\left\{\frac{\Delta W_{mnk}}{W_{mnk}}\frac{\Delta W^*_{rnq}}{W^*_{rnq}}\right\} = \delta^2\left\{\frac{\Delta W}{W}\right\}\Psi(n, r, m, q, k), \tag{6}$$

где $\Psi(n, r, m, a, k)$ — бинарная функция, принимающая значения нуль или единица; $\delta\left\{\frac{\Delta W}{W}\right\}$ — среднеквадратичная погрешность, принимаемая нами одинаковой для всех ВКФ.

Подставим (6) в (4) и в результате простых преобразований найдем выражение для среднеквадратичной погрешности спектрального отсчета, вычисляемого по БПФ:

$$\delta\{\Delta S\ (n)\} = \delta\left\{\frac{\Delta W}{W}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1} f(k)\, f(q)\, e^{-j\frac{2\pi n(k-q)}{N}}\sum_{m=0}^{\gamma-1}\sum_{r=0}^{\gamma-1}\Psi(n, r, m, q, k)\right\}. \tag{7}$$

Непосредственная оценка погрешности $\Delta S(n)$ по (7) затруднительна в силу громоздкости последнего, поэтому оценим $\delta\{\Delta S(n)\}$, применяя неравенство Коши — Буняковского

$$\tilde{\delta}\{\Delta S(n)\} \leqslant \delta\left\{\frac{\Delta W}{W}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}[f(k)\, f(q)]^2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{\gamma-1}\sum_{r=0}^{\gamma-1}\Psi(n, r, m, q, k)\right]^2\right\}^{1/4}. \tag{8}$$

Учитывая равенство Парсеваля

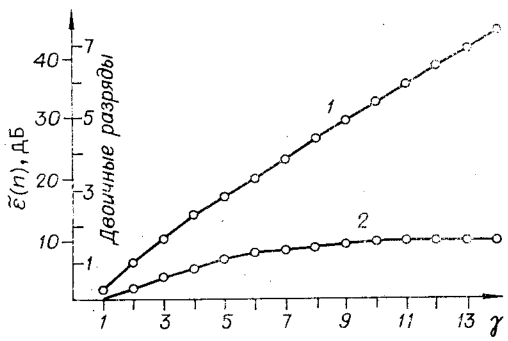
$$\sum_{k=0}^{N-1}|f(k)|^2\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|S(n)|^2 = \delta^2\{S(n)\}, \tag{9}$$

где $\delta\{S(n)\}$ представляет собой среднеквадратичное по частоте значение спектральной плотности, найдем следующее окончательное выражение для $\varepsilon(n)$ — отношения нормированной среднеквадратичной погрешности спектрального отсчета к среднеквадратичной погрешности весового коэффициента:

$$\tilde{\varepsilon}(n)=\frac{\tilde{\delta}\{\Delta S(n)\}}{\tilde{\delta}\{S(n)\}}\Big/\delta\left\{\frac{\Delta W}{W}\right\}=\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{\gamma-1}\sum_{r=0}^{\gamma-1}\Psi(n,\,r,\,m,\,q,\,k)\right]^2\right\}^{1/4}. \quad (10)$$

Величина $\tilde{\varepsilon}(n)$ является функцией числа отсчетов в анализируемой реализации сигнала и возрастает при увеличении N. Анализ выражения (10) для конкретного графа БПФ показывает, что внутреннюю двойную сумму можно представить одинарной суммой, так как $\Psi(n,r,m,k,q)=$ $=0$, если $m\neq r$. Можно также показать, что $\sum\limits_{m=0}^{\gamma-1}\Psi(n,\,r,\,m,\,k,\,q)$ не зависит от индекса n. Приведенные предпосылки позволяют найти численное решение (10) итерационным методом. Для этого достаточно положить известной $\tilde{\varepsilon}(n)$ для массива N и определить $\tilde{\varepsilon}'(n)$ для массива $2N$. Последовательное применение итерационного метода, начиная с $N=2$, позволяет найти $\tilde{\varepsilon}(n)$ для произвольного N.

Для сопоставления полученного результата с известным [1] выражение (10) рассчитывалось на ЭВМ применительно к структуре графа БПФ с децимацией по частоте. В результате была получена зависимость (см. рисунок, кривая *2*) величины $\tilde{\varepsilon}(n)$ от размеров вычисляемого массива $N=2^{\gamma}$, позволяющая оценить сверху относительную погрешность для сигналов произвольной формы. На этом же рисунке приведена зависимость (кривая *1*) $\tilde{\varepsilon}(n)=\varphi(N)$, полученная по (4) для сигналов типа белого шума (в этом случае нетрудно показать, что $\tilde{\varepsilon}(n)=\gamma$ и применение неравенства Коши — Буняковского исключается). Сравнение кривых *1* и *2* с результатами [1] показывает совпадение оценок $\tilde{\varepsilon}(n)$ для сигналов, представленных некоррелированными выборками. В случае анализа сигналов, отличных от белого шума, полученные результаты существенно превышают результаты [1]. Это объясняется применением максимизирующего неравенства. Реальная погрешность, возникающая при анализе сигналов произвольной формы, будет принимать значения, находящиеся в промежутке между приведенными кривыми.



ВЫВОДЫ

Предложен простой метод оценки погрешностей, обусловленных квантованием гармонических коэффициентов при вычислении спектральных функций по алгоритму БПФ.

Получены оценки для рассматриваемой погрешности, максимизированные по ансамблю анализируемых функций и учитывающие корреляционные связи между отдельными составляющими погрешностями при выполнении БПФ.

На основе сопоставления полученных результатов с известными доказано, что оценка рассматриваемой погрешности по белому шуму является заниженной и ее применение в аппаратурных разработках может привести к значительным ошибкам для сигналов, отличных от белого шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Оппенгейм А., Вайнштейн К.** Влияние конечной длины регистра при цифровой фильтрации и быстром преобразовании Фурье.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 8, с. 62—74.
2. **James D. V.** Quantization errors in FFT.— "IEEE Trans. on ASSP", 1975, vol. 23-ASSP, N 3, p. 277—283.
3. **Галаган В. Г., Шубс Ю. В.** Гибридные методы вычисления коэффициентов Фурье.— «Вестник КПИ. Сер. радиотехника и электроакустика», 1977, № 14, с. 40—42.

Поступила в редакцию 13 октября 1976 г.;
окончательный вариант — 14 июля 1977 г.

УДК 62.507

В. И. ЛЕВИН

(Пенза)

АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

1. Постановка задачи. Автоматизация научных исследований, проектирования и конструирования требует постоянного совершенствования средств ввода и вывода из ЭВМ графической информации, а также разработки новых, более совершенных методов анализа такой информации.

Пусть задан график некоторой однозначной функции $y=f(x)$ (рис. 1). Требуется определить форму заданной кривой, т. е. соотношения между ординатами различных точек кривой. Ясно, что форма кривой, понимаемая в указанном смысле, не меняется при ее аффинных преобразованиях (например, при равномерном растяжении вдоль одной или обеих осей). Это позволяет считать форму кривой носителем существенной информации о кривой. Имея такую информацию, можно решать следующие задачи: 1) определение монотонности (немонотонности) функции f; 2) определение числа и характера ее экстремумов; 3) установление сравнительной скорости роста функции на различных участках изменения аргумента; 4) отыскание соотношений локальных экстремумов и точек глобальных экстремумов функции. Отметим, что определение формы кривой $y=f(x)$ принципиально не требует вычисления ее ординат y_i; достаточно только найти соотношения ординат y_i, соответствующих различным абсциссам x_i. Это обстоятельство приводит к тому, что анализ формы кривой при надлежащем его выполнении оказывается менее трудоемким процессом, чем полное вычисление кривой.

2. Идея решения. Разобьем интервал $[a, b]$, на котором задана функция $y=f(x)$, на $n—1$ равных подынтервалов. Для этого введем n точек деления:

$$x_1=a,\ x_2=a+h,\ x_3=a+2h,\ \ldots,\ x_{n-1}= \\ =a+(n-2)h,\ x_n=b;\ h=(b-a)/(n-1). \tag{1}$$

Число подынтервалов и длина h каждого из них определяются в соот-