АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1979

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 621.317

Ю. Д. ПОПОВ, В. В. ХЛОБЫСТОВ
(Киев)

О НАДЕЖНОСТИ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПЕРЕСЧЕТА ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ МАСШТАБНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ШКАЛ

Применение в фазовых системах периодических сигналов приводит к нарушению однозначного соответствия между измерениями и оценкой искомого параметра. Для устранения возникающей неоднозначности на практике используется способ многошкальных измерений, с математической точки зрения описываемый системой уравнений

$$x=k_1+\varphi_1/d_1=\ldots=k_m+\varphi_m/d_m, \qquad (1)$$

где $k_i=[d_ix]^+$ и $\varphi_i=\{d_ix\}^+$ — соответственно целая и дробная части от d_ix, d_i — масштабный коэффициент i-й шкалы. В настоящей работе мы будем предполагать, что возмущениям подвержены не только величины φ_i, $i=\overline{1, m}$ (традиционная постановка задачи), но также и параметры d_i и поэтому проблема устранения неоднозначности циклических измерений будет состоять в оценке x (либо k_m) по измеренным значениям φ_i и d_i $(i=\overline{1, m})$.

Обозначим измеренные значения φ_i и d_i через $\widehat{\varphi}_i$ и $\widehat{d}_i$ соответственно и предположим, что $\widehat{\varphi}_i=\varphi_i+\psi_i$, $\widehat{d}_i=d_i+\delta_i$, ψ_i и δ_i $(i=\overline{1, m})$ представляют собой независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону, причем ψ_i имеет параметры $(0, \sigma(\varphi_i))$, а δ_i — $(0, \sigma(d_i))$.

Для оценки параметра k_m применим распространенный на практике метод последовательного пересчета измерений из шкалы в шкалу, в той либо иной форме исследуемый в [1—6]. Указанный метод задается следующим рекуррентным соотношением для получения оценки k_m:

$$\widehat{k}_{i+1}=[\widehat{h}_i(\widehat{k}_i+\widehat{\varphi}_i)-\widehat{\varphi}_{i+1}+\varepsilon]^+, \quad \widehat{k}_1=0, \qquad (2)$$

где $\varepsilon\in[0, 1)$ — некоторая величина, о выборе которой будет сообщено ниже, а $\widehat{h}_i=\widehat{d}_{i+1}/\widehat{d}_i$.

Цель работы состоит в том, чтобы при сформулированных выше предположениях найти надежность устранения неоднозначности, выражаемую вероятностью $P\{\widehat{k}_m=k_m\}$ правильного восстановления параметра k_m, и решить задачу оптимального выбора масштабных коэффициентов d_i с целью максимизации указанной надежности. Заметим, что аналогичные задачи были решены в [6], но там $\delta_i \equiv 0$, $i=\overline{1, m}$.

Сначала строго рассмотрим простейший случай, когда $m=2$ и $\psi_i \equiv 0$. Из соотношений (1) следует, что

$$k_2 = [h_1\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon]^+,$$

где $h_1 = d_2/d_1$, а из формулы (2) —

$$\hat{k}_2 = [\hat{h}_1\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon]^+ = [(\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 + h_1\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon]^+ =$$
$$= [(\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 + k_2 + \varepsilon]^+ = k_2 + [(\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 + \varepsilon]^+,$$

[illegible]
случайной величины η и, как нетрудно видеть, зависит от параметров x, d_1, d_2, $\sigma(d_1)$, $\sigma(d_2)$. Можно показать, что

$$f_\eta(t) = Kx/\varphi(t)\,[1 + \sqrt{2\pi}\,\alpha(t)\,\Phi(\alpha(t))\exp\{\alpha^2(t)/2\}], \tag{4}$$

где

$$K = \frac{\sigma(d_1)\,\sigma(d_2)\,d_1}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{d_1^2}{\sigma^2(d_1)} + \frac{d_2^2}{\sigma^2(d_2)}\right]\right\};$$

$$\varphi(t) = \sigma^2(d_1)(t + xd_2)^2 + x^2\sigma^2(d_2)\,d_1^2;$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sigma(d_1)\,\sigma(d_2)} \frac{\sigma^2(d_1)\,d_2(t + xd_2) + \sigma^2(d_2)\,d_1^2 x}{\sqrt{\sigma^2(d_1)(t + xd_2)^2 + \sigma^2(d_2)\,d_1^2 x^2}};$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Итак, при $m=2$ и $\psi_1 \equiv 0$ вероятность правильного устранения неоднозначности дается формулой (3), где $f_\eta(t)$ определяется выражением (4). Ясно, что даже в этом простом случае оптимальный выбор ε и подсчет вероятности $P\{\hat{k}_2 = k_2\}$ сопряжены с некоторыми трудностями. В табл. 1 даны значения указанной вероятности при $\varepsilon = 0{,}5$, $d_1 = 1$, $d_2 = 10$, $\sigma(d_1) = \sigma(d_2) = \sigma$ в зависимости от x и σ. Заметим, что при $x=0$ плотность $f_\eta(t)$ является δ-функцией Дирака и $P\{\hat{k}_2 = k_2\}|_{x=0} = 1$. Кроме того, можно показать, что с точностью, по крайней мере, до 10^{-4} при указанных ранее значениях параметров

$$\int_{-0,5}^{0,5} f_\eta(t)\,dt = \Phi\left(\frac{c_1(x)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{c_2(x)}{\sigma}\right),$$

где $c_1(1) = 0{,}0476$, $c_2(1) = 0{,}0525$; $c_1(0{,}5) = 0{,}0905$, $c_2(0{,}5) = 0{,}1104$.

Учитывая сложность вычислений по формулам (3) и (4), попытаемся упростить нахождение вероятности правильного восстановления параметра k_m для случая $m=2$, $\psi_i = 0$.

Представим случайную величину η в виде

$$\eta = (\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 = ((d_2 + \delta_2)/(d_1 + \delta_1) - d_2/d_1)\varphi_1.$$

Таблица 1

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	1	1	1	1
0,5	1	1	0,999	0,985	0,951
1	1	0,987	0,904	0,788	0,683

Таблица 2

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	1	1	1	1
0,5	1	1	0,999	0,988	0,954
1	1	0,988	0,904	0,789	0,683

С точностью до $0(\delta_i)$ будем иметь

$$\eta \simeq \left(-\frac{d_2}{d_1^2}\delta_1 + \frac{1}{d_1}\delta_2\right)\varphi_1 = (-h_1\delta_1 + \delta_2)\,x$$

и, следовательно,

$$f_\eta(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(d)} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2(d)}\right\}, \tag{5}$$

где $\sigma(d) = x\sqrt{h_1^2\sigma^2(d_1) + \sigma^2(d_2)} \simeq xh_1\sigma(d_1)$, если $\sigma(d_1) \simeq \sigma(d_2)$.

Ясно, что для нормальной с параметрами $(0, \sigma(d))$ плотности $f_\eta(t)$, задаваемой формулой (5), вероятность $P\{\hat{k}_2 = k_2\}$ максимальна при $\varepsilon = 0{,}5$ и равна

$$P\{\hat{k}_2 = k_2\} \simeq 2\Phi(0{,}5/\sigma(d)) \simeq 2\Phi(0{,}5/xh_1\sigma(d_1)). \tag{6}$$

Интересно сравнить формулу (6) с аналогичной формулой в случае, когда $\delta_i \equiv 0$, $\psi_i \not\equiv 0$, $i = 1, 2$, приведенной в работе [6]. Очевидно, что влияние, оказываемое возмущением величины φ_1 на надежность правильного устранения неоднозначности, имеет тот же порядок (по крайней мере, при $x \simeq 1$), что и влияние возмущения масштабного коэффициента d_1.

В табл. 2 приведены значения $P\{\hat{k}_2 = k_2\}$, вычисленные по формуле (6) при тех же значениях параметров, что и в табл. 1.

Сопоставление данных табл. 1 и 2 показывает весьма высокую степень совпадения значений вероятности правильного устранения неоднозначности, полученных по точной и приближенной методикам.

Рассмотрим теперь общий случай ($m > 2$, $\varphi_i \not\equiv 0$) отыскания надежности устранения неоднозначности и решим задачу оптимального выбора масштабных коэффициентов d_i. Ввиду указанных ранее трудностей аналитического вывода и численного расчета точных соотношений воспользуемся приближенной методикой вывода простых формул вероятности правильного устранения неоднозначности, позволяющих, однако, получать нужные результаты с большой степенью точности.

Итак, пусть предварительно $m = 3$ и $\psi_i \not\equiv 0$. Из соотношений (1) и (2) нетрудно получить, что

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = P\{[\hat{h}_2[z_1 + \varepsilon]^+ + z_2 + \varepsilon]^+ = 0\},$$

где $z_1 = (\hat{h}_1 - h_1)xd_1 + \hat{h}_1\psi_1 - \psi_2$, $z_2 = (\hat{h}_2 - h_2)xd_2 + \hat{h}_2\psi_2 - \psi_3$, $h_i = d_{i+1}/d_i$, $\hat{h}_i = \hat{d}_{i+1}/\hat{d}_i$, $i = 1, 2$. Далее будем иметь

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{[z_1 + \varepsilon]^+ = n,\ 0 \leqslant \hat{h}_2 n + z_2 + \varepsilon < 1\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n - \varepsilon \leqslant z_1 < n + 1 - \varepsilon,\ -\varepsilon \leqslant z_2 + \hat{h}_2 n < 1 - \varepsilon\} \tag{7}$$

С точностью до членов первого порядка малости относительно δ_i и ψ_i случайные величины z_1 и $z_2+\widehat{h}_2 n$ представим в виде

$$\begin{aligned} z_1 &\simeq \eta_1 = -h_1 x\delta_1 + x\delta_2 + h_1\psi_1 - \psi_2; \\ z_2 + \widehat{h}_2 n &\simeq \eta_2(n) + h_2 n; \\ \eta_2(n) &= -h_2(x+n/d_2)\delta_2 + (x+n/d_2)\delta_3 + h_2\psi_2 - \psi_3. \end{aligned} \tag{8}$$

В предположении, что величины h_i достаточно велики, а δ_i и ψ_i достаточно малы, из (7) и (8) получим

$$\begin{aligned} P\{\widehat{k}_3 = k_3\} &\simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n-\varepsilon \leqslant \eta_1 < n+1-\varepsilon,\ -h_2 n - \varepsilon \leqslant \eta_2(n) < \\ &< -h_2 n + 1 - \varepsilon\} \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n-\varepsilon \leqslant \eta_1 < n+1-\varepsilon\} P\{-h_2 n - \\ &- \varepsilon \leqslant \eta_2(n) < -h_2 n + 1 - \varepsilon\} \simeq P\{-\varepsilon \leqslant \eta_1 < 1-\varepsilon\} \times \\ &\times P\{-\varepsilon \leqslant \eta_2(0) < 1-\varepsilon\}. \end{aligned} \tag{9}$$

В (9) мы считаем величины η_1 и $\eta_2(n)$ практически независимыми (η_1 определяется в основном случайными величинами δ_1 и ψ_1, $\eta_2(n)$ — величинами δ_2 и ψ_2, а величины δ_i и ψ_i независимы по предположению); кроме того, при $n \neq 0$

$$P\{-h_2 n - \varepsilon \leqslant \eta_2(n) < -h_2 n + 1 - \varepsilon\} \simeq 0.$$

Поскольку величины η_1 и $\eta_2(0)$ распределены нормально, из (9) следует, что вероятность правильного восстановления параметра k_3 максимальна при $\varepsilon = 0{,}5$ и равна

$$P\{\widehat{k}_3 = k_3\} \simeq 2\Phi(0{,}5/\sigma_1)\,2\Phi(0{,}5/\sigma_2),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\left(h_i^2\sigma^2(d_i) + \sigma^2(d_{i+1})\right)x^2 + h_i^2\sigma^2(\varphi_i) + \sigma^2(\varphi_{i+1})} \simeq \\ &\simeq h_i\sqrt{\sigma^2(d_i)\,x^2 + \sigma^2(\varphi_i)}, \qquad i = 1,2. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, при произвольном $m \geqslant 2$ получим

$$P\{\widehat{k}_m = k_m\} \simeq 2^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \Phi\left(\frac{0{,}5}{h_i\bar{\sigma}_i}\right), \tag{10}$$

где $\bar{\sigma}_i = \sqrt{\sigma^2(d_i)\,x^2 + \sigma^2(\varphi_i)}$, $i = \overline{1,\ m-1}$.

Формула (10) наряду с простотой обладает (как показывают выполненные нами вычисления) и высокой степенью точности. Кроме того, она позволяет (в предположении, что $\sigma(d_i) = \sigma(d)$, $\sigma(\varphi_i) = \sigma(\varphi)$, а d_1 и d_m заданы) решить вопрос об оптимальном выборе коэффициентов $d_2, d_3, \ldots, d_{m-1}$. Нетрудно убедиться, что справедливо такое утверждение:

Максимальное значение вероятности $P\{\widehat{k}_m = k_m\}$ достигается при $h_i = h = \mathrm{const}$, другими словами — если величины $d_1, d_2, \ldots, d_m$ образуют геометрическую прогрессию

$$d_k = (d_m/d_1)^{k-1/(m-1)} d_1, \quad k = \overline{2,\ m-1}.$$

Анализируя формулу (10), можно сделать следующие выводы. При наличии возмущений масштабных коэффициентов шкал надежность устранения неоднозначности методом последовательного пересчета

Таблица 3

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	0,988	0,904	0,789	0,683
0,5	1	0,975	0,864	0,736	0,629
1	1	0,923	0,762	0,623	0,520

Таблица 4

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	0,964	0,739	0,491	0,319
0,5	1	0,926	0,645	0,399	0,248
1	0,999	0,786	0,442	0,242	0,141

убывает с возрастанием x. Соответствующие вычисления при определенных наборах параметров приведены в табл. 3 (при $m=2$, $h=10$, $\sigma(d_i)=\sigma(\varphi_i)=\sigma$) и табл. 4 (при $m=4$, $h_i=10$, $\sigma(d_i)=\sigma(d_i)=\sigma(\varphi_i)=$ $=\sigma$). Согласно формуле (10), метод последовательного пересчета разбивается на $m-1$ этапов, в некотором смысле независимых друг от друга. На каждом из этих этапов, связанных с парами d_i, d_{i+1}, вероятность правильного устранения неоднозначности уменьшается в γ_i раз, где $\gamma_i=2\Phi(0{,}5/h_i\bar{\sigma}_i)$. При этом если $\bar{\sigma}_i$ увеличивается в некоторое число раз, то для неизменности $P\{\hat{k}_m=k_m\}$ во столько же раз должна быть уменьшена величина h_i.

Замечание 1. При $\sigma(d_i)=0$, т. е. при отсутствии возмущений масштабных коэффициентов шкал, формула (10) указывалась ранее в [6].

Замечание 2. Если математические ожидания $M\hat{d}_i=d_i$ известны, то вместо формулы (2) можно пользоваться формулой

$$\hat{k}_{i+1}=[h_i(\hat{k}_i+\tilde{\varphi}_i)-\tilde{\varphi}_{i+1}+\varepsilon]^+,\quad \hat{k}_1=0, \tag{11}$$

где $\tilde{\varphi}_i=\varphi_i+\psi_i-x\delta_i$. При этом в отличие от формулы (2), где возмущения δ_i масштабных коэффициентов d_i входят в $\hat{h}_i$, в формуле (11) эти возмущения влияют на погрешности, накладываемые на φ_i. Это можно объяснить следующим образом. Из (1) имеем $k_i+\varphi_i=d_ix$. Подставляя сюда, вместо φ_i и d_i, их наблюденные значения, получим $k_i+\varphi_i+\psi_i=$ $=d_ix+\delta_ix$. Последнее соотношение и позволяет считать, что d_i не возмущены, а погрешности $\psi_i-\delta_ix$ накладываются на φ_i. Отсюда, используя результаты работы [6], сразу получим формулу (10) и для оценки $\hat{k}_m$, задаваемой соотношением (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тетнев Г. С.** К вопросу о выборе параметров многошкальных измерительных систем.— «Радиотехника и электроника», 1965, № 9, с. 1710—1712.
2. **Тененбаум М. М., Созиев А. С.** К вопросу о точности двухшкальных измерительных систем.— «Радиотехника и электроника», 1968, № 9, с. 1591—1596.
3. **Скрыпник Г. И., Серова А. А., Атаев Д. И.** О надежности устранения многозначности фазовых измерений.— «Радиотехника и электроника», 1968, № 10, с. 1753—1761.
4. **Собцов Н. В.** Оценка максимального правдоподобия в многошкальной измерительной системе.— «Радиотехника и электроника», 1972, № 10, с 2076—2083.
5. **Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И.** О разрешении неоднозначности циклических измерений.— «Автометрия», 1972, № 4, с. 69—82.
6. **Попов Ю. Д.** Оптимизация одного метода оценки параметров при циклических измерениях.— «Автометрия», 1978, № 2, с. 57—63.

Поступила в редакцию 6 марта 1978 г.