УДК 621.391.837.2

Н. Д. ГОГИН

(Петрозаводск)

ко спектр этого преобразования, который (в одномерном случае) дается формулами [1, 6]

$$P(0)=\hat{f}(0)^2, \quad P(l)=\sum_{m=2^{l-1}}^{2^l-1}\hat{f}(m)^2. \tag{1}$$

Понятно, что спектр (1) содержит в себе далеко не полную информацию о функции f, и поэтому возможности использования его для задач распознавания существенно ограничены.

В настоящей работе предлагается метод разложения функции f по некоторому новому ортогональному базису, построенному на основе базиса Уолша — Адамара, позволяющий сохранять (при циклических сдвигах) весь набор коэффициентов разложения; этот метод, будучи тесно связанным с обычным преобразованием Адамара, также удобен и легко осуществим практически.

В работе приняты следующие обозначения: $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ — поле вычетов по модулю 2; $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел; $\boldsymbol{C}[W]$ — групповое кольцо группы W, т. е. множество всех комплекснозначных функций на W; $(f_1 * f_2)(w)=\sum_{u\in W} f_1(u)\, f_2(w+u)$ — свертка двух функций на группе W, служащая умножением в $\boldsymbol{C}[W]$; $U=\{z\in \boldsymbol{C}/|z|=1\}$ — комплексная единичная окружность; $GF(2^\nu)$ — поле Галуа, состоящее из 2^ν элементов.

Пусть ν — натуральное число, $\nu\geqslant 1$, $n=2^\nu$ и $N=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Обозначим через V ν-мерное векторное пространство над полем $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$, а через W — прямую сумму двух экземпляров пространства V. Элементы из W будем записывать в виде $w=v_1\oplus v_2$, где $v_1, v_2\in V$.

Определим биекции $\lambda: V\to N$ и $\Lambda=\lambda\times\lambda$: $W\to N\times N$ по формулам

$$\lambda(v)=\lambda((\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{\nu-1}))=\sum_{i=0}^{\nu-1}\varepsilon_i 2^i; \tag{2}$$

$$\Lambda(v_1\oplus v_2)=(\lambda(v_1),\lambda(v_2)), \tag{3}$$

где $v=(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\nu-1})\in V$, $\varepsilon_i=0$ или 1, $i=0,1,\ldots,\nu-1$.

Каждая (комплекснозначная) функция $f: N\times N\to \boldsymbol{C}$ (т. е. $n\times n$ — матрица) будет служить для нас математической формализацией функции яркости изображения, получаемого на светочувствительной матрице, содержащей n^2 элементов разрешения*, и с помощью биекции Λ всякая такая функция может рассматриваться как элемент группового кольца $\boldsymbol{C}[W]$ группы W, согласно

$$f(w)=f(\Lambda(w)), \quad w\in W. \tag{4}$$

Определим на V симметричную билинейную форму $\langle v_1, v_2\rangle$ по формуле

$$\langle v_1, v_2\rangle=\sum_{i=0}^{\nu-1}\varepsilon_i\eta_i, \tag{5}$$

---

* Для вопросов, затрагиваемых в настоящей работе, число уровней квантования яркости не имеет значения.

где $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\nu-1})$, $v_2 = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1})$, и построим, используя ее, симметричную билинейную форму на W (которую мы будем обозначать также через $\langle -,- \rangle$) по правилу

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1 \oplus v_1', v_2 \oplus v_2' \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1', v_2' \rangle, \tag{6}$$

Ясно, что набор характеров $\{\chi_u\}_{u \in W}$ исчерпывает всю группу $\widehat{W}$ и является полным набором неприводимых характеров группы W [3].

Преобразованием Адамара функции f из $C[W]$ назовем функцию $\widehat{f}$ (которая будет обозначаться также через $\mathscr{H}(f)$), определяемую равенством

$$\widehat{f}(u) = \frac{1}{n} \sum_{w \in W} \chi_u(w) f(w). \tag{8}$$

Таким образом, преобразованием Адамара является преобразование Фурье на группе W [7].

Возвращаясь к матричной записи и используя формулы (4)—(7), легко получить, что

$$\widehat{f} = HfH/n, \tag{9}$$

где H — матрица Адамара размерности $n \times n$ [2].

Напомним, что преобразование Адамара инволютивно (т. е. $\widehat{\widehat{f}} = f$), инвариантно относительно двоичного сдвига и для него справедливы равенство Парсеваля

$$\frac{1}{n^2} \sum_{w \in W} f_1(w) \overline{f_2(w)} = \frac{1}{n^2} \sum_{w \in W} \widehat{f}_1(w) \overline{\widehat{f}_2(w)}$$

и формула преобразования свертки

$$\widehat{f_1 * f_2} = n \widehat{f}_1 \widehat{f}_2. \tag{10}$$

Выберем теперь в качестве базиса пространства $C[W]$ функции

$$\delta_a(w) = \begin{cases} 1, & a = w; \\ 0, & a \neq w, \end{cases} \tag{11}$$

где $a, w \in W$. Тогда для любого $f \in C[W]$ имеем

$$f = \sum_{w \in W} f(w) \delta_w \quad \text{и} \quad \widehat{f} = \sum_{w \in W} \widehat{f}(w) \delta_w,$$

откуда

$$f = \widehat{\widehat{f}} = \sum_{w \in W} \widehat{f}(w) \widehat{\delta}_w. \tag{12}$$

Ясно, что

$$\widehat{\delta}_w(u) = \frac{1}{n} \sum_{w' \in W} \chi_u(w') \delta_w(w') = \frac{1}{n} \chi_u(w) = \frac{1}{n} \chi_w(u). \tag{13}$$

Функции $\Delta_w = n\widehat{\delta}_w = \chi_w$ (называемые базисными изображениями) являются черно-белыми масками, которые и используются на практике. Формула (12) принимает вид

$$f = \frac{1}{n} \sum_{w \in W} \widehat{f}(w)\, \Delta_w. \tag{14}$$

Для $w = v \oplus 0$ (или $w = 0 \oplus v$) ограничения функций $\Delta_w = \Delta_{v \oplus 0}$ (или $\Delta_{0 \oplus v}$) на V называются функциями Уолша, которые будут обозначаться нами через Δ_v.

Если теперь $w = v_1 \oplus v_2$, $v_1, v_2 \in V$, то $w = (v_1 \oplus 0) + (0 \oplus v_2)$ и, согласно формуле (10), имеем

$$\Delta_{v_1 \oplus 0} \Delta_{0 \oplus v_2} = n^2 \widehat{\delta}_{v_1 \oplus 0} \widehat{\delta}_{0 \oplus v_2} = n \left(\widehat{\delta_{v_1 \oplus 0} * \delta_{0 \oplus v_2}} \right) = n \widehat{\delta}_w = \Delta_w. \tag{15}$$

Таким образом, формула (15) показывает, что каждое базисное изображение можно представить как произведение двух функций Уолша.

Пусть $\mathscr{A} : W \longrightarrow W$ — линейный оператор на пространстве W. Если $\chi_v \in \widehat{W}$, то определим по χ_v и $\mathscr{A}$ характер $\chi_v^{\mathscr{A}} \in \widehat{W}$ по формуле

$$\chi_v^{\mathscr{A}}(w) = \chi_v(\mathscr{A}(w)), \quad w \in W. \tag{16}$$

Поскольку $\chi_v^{\mathscr{A}}$ снова является неприводимым характером группы W, то существует единственный $v' \in W$, такой, что

$$\chi_v^{\mathscr{A}} = \chi_{v'}. \tag{17}$$

Легко видеть, что $v' = \mathscr{A}^*(v)$, где $\mathscr{A}^*$ — оператор, сопряженный к $\mathscr{A}$ относительно билинейной формы $\langle -,- \rangle$.

Таким образом,

$$\chi_v^{\mathscr{A}} = \chi_{\mathscr{A}^*(v)}. \tag{18}$$

Далее продолжим по линейности оператор $\mathscr{A}$ на все кольцо $C[W]$ и обозначим это продолжение через $\widetilde{\mathscr{A}}$, полагая

$$(\widetilde{\mathscr{A}}(f))(w) = f(\mathscr{A}(w)), \quad w \in W. \tag{19}$$

Предположим теперь, что $\mathscr{A}$ — невырожденный оператор. Возьмем произвольное $f \in C[W]$ и найдем $(\mathscr{H}\widetilde{\mathscr{A}}^{-1})(f)$:

$$(\mathscr{H}\widetilde{\mathscr{A}}^{-1})(f)(u) = \frac{1}{n} \sum_{w \in W} \chi_u(w)\, f(\mathscr{A}^{-1}(w)). \tag{20}$$

Положим в последней сумме $w' = \mathscr{A}^{-1}(w)$ и применим формулы (19) и (18):

$$(\mathscr{H}\widetilde{\mathscr{A}}^{-1})(f)(u) = \frac{1}{n} \sum_{w' \in W} \chi_{\mathscr{A}^*(u)}(w')\, f(w') = \widehat{f}(\mathscr{A}^*(u)) = (\widetilde{\mathscr{A}}^* \mathscr{H})(f). \tag{21}$$

В силу произвольности f заключаем, что

$$\mathscr{H}\widetilde{\mathscr{A}}^{-1} = \widetilde{\mathscr{A}}^* \mathscr{H}. \tag{22}$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\widetilde{\mathscr{A}}(\delta_a) = \delta_{\mathscr{A}^{-1}(a)}. \tag{23}$$

Соотношение (23) показывает, что $\widetilde{\mathscr{A}}$ — перестановочный оператор на $\boldsymbol{C}[W]$, и поэтому формула (22) допускает следующую физическую интерпретацию: если изображение f претерпевает «искажение», вызванное (описанным способом) действием невырожденного линейного оператора $\mathscr{A}$, то матрица коэффициентов его преобразования Адамара отличается от соответствующей матрицы «неискаженного» изображения перестановкой элементов. Использование этого свойства позволяет во многих конкретных ситуациях строить разнообразные тесты для распознавания образов, стандартные (т. е. «неискаженные») изображения которых известны.

Напомним теперь, что в векторном пространстве V можно ввести операцию умножения таким образом, что V станет полем Галуа $GF(2^\nu)$ [4, 5]. Как известно, мультипликативная группа V^* поля $GF(2^\nu)$ является циклической. Пусть z — некоторая фиксированная образующая этой группы. Возьмем некоторый элемент $a \in V^*$ и рассмотрим отображение $R_a: V \longrightarrow V$, определенное правилом

$$R_a(v) = av. \tag{24}$$

Ясно, что R_a является линейным (обратимым) оператором на V. Кроме того, если $a = z^k$, $0 \leqslant k < 2^\nu - 1$, то

$$R_a(v) = \begin{cases} 0, & \text{если } v = 0; \\ z^{k+l}, & \text{если } v = z^l \end{cases}$$

(здесь сумма $k + l$ берется по модулю $2^\nu - 1$).

Таким образом, оператор R_a осуществляет (циклический) сдвиг элементов из V^*. Если $m = a \oplus b \in W$, причем $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то определим оператор R_m на W как прямую сумму R_a и R_b, т. е.

$$R_m(v_1 \oplus v_2) = R_a(v_1) \oplus R_b(v_2) = (av_1) \oplus (bv_2).$$

Расположим элементы пространства V (или, что то же самое, строки и столбцы нашей матрицы) по степеням элемента z:

$$0,\ z^0 = 1,\ z^1,\ z^2, \ldots,\ z^{2^\nu - 2}.$$

Будем называть эту нумерацию циклической в отличие от рассматривавшейся ранее стандартной нумерации. В этой нумерации компоненты R_a и R_b оператора R_m осуществляют (циклические) сдвиги по горизонтали и вертикали соответственно, причем столбец $(v, 0)$ и строка $(0, v)$, $v \in V$ переходят под действием R_m сами в себя.

Для того чтобы обеспечить обратимость оператора $\widetilde{R}_m$, будем предполагать, что все допустимые сдвиги изображения f и само оно лежат в той части нашей матрицы, которая не включает в себя элементов нулевой строчки и нулевого столбца.

Переход от стандартной нумерации к циклической осуществляется с помощью умножения матрицы f справа и слева на перестановочные матрицы P и $P^{-1} = P^T$ соответственно. Легко убедиться в том, что если $P = (r_{ij})_{0 \leqslant i, j \leqslant n-1}$, то

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = 0; \\ 1, & \text{если } j = \lambda(z^{i-1}); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, умножение на P справа и на P^{-1} слева задает линейный (перестановочный) оператор на $\boldsymbol{C}[W]$, который будем обозначать через $\mathscr{P}$.

Пусть f^0 — несмещенное изображение нашего объекта, записанное в стандартной нумерации, а $\mathcal{P}(f^0)$ — его запись в циклической нумерации. Тогда в силу всего сказанного выше имеем

$$\mathcal{H}\widetilde{R}_{m-1}\mathcal{P}(f^0)=\widetilde{R}^*_m\mathcal{H}\mathcal{P}(f^0) \tag{26}$$

для любого сдвига R_m.

Пусть теперь f^1 — сдвиг изображения f^0, записанный в стандартной нумерации. Ясно, что f^1 можно записать как

$$f^1=\mathcal{P}^{-1}\widetilde{R}_{m-1}\mathcal{P}(f^0) \tag{27}$$

для некоторого $m=a\oplus b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Из (27) получаем

$$\widetilde{R}_{m-1}\mathcal{P}(f^0)=\mathcal{P}(f^1)$$

и, подставляя это выражение в (26), находим, что

$$\mathcal{H}\mathcal{P}(f^1)=\widetilde{R}^*_m\mathcal{H}\mathcal{P}(f^0). \tag{28}$$

Поскольку, как уже отмечалось выше, $\mathcal{P}(g)=P^{-1}gP$ и $\mathcal{H}(g)=HgH/n$ для любого $g\in \boldsymbol{C}[W]$, обозначив матрицу $HP^{-1}f^0PH/n$ через M^0 и считая M^0 известной, можно утверждать (на основании формулы (28)), что матрица $M^1=HP^{-1}f^1PH/n$ отличается от матрицы M^0 лишь перестановкой элементов для любого (допустимого) сдвига f^1 изображения f^0. Заметим еще раз, что при всех этих перестановках нулевой столбец и нулевая строка матрицы M^0 переходят сами в себя. Положим теперь для произвольной функции $f\in \boldsymbol{C}[W]$

$$\tilde{f}=HP^{-1}fPH/n. \tag{29}$$

Поскольку $\tilde{f}=\sum\limits_{w\in W}\tilde{f}(w)\,\delta_w$ и, кроме того, в силу (29) $f=PH\tilde{f}HP^{-1}/n$, то

$$f=\sum_{w\in W}\tilde{f}(w)\left[\frac{1}{n}PH\delta_wHP^{-1}\right]=\sum_{w\in W}\tilde{f}(w)\left[P\widehat{\delta}_wP^{-1}\right].$$

Вводя обозначения $\gamma_w=P\widehat{\delta}_wP^{-1}$ и $\Gamma_w=n\gamma_w=P\Delta_wP^{-1}$, находим, что для $w=(v_1\oplus 0)+(0\oplus v_2)$

$$\Gamma_{v_1\oplus 0}\Gamma_{0\oplus v_2}=P\Delta_wP^{-1}=\Gamma_w. \tag{30}$$

Формула (30) подобно формуле (15) позволяет строить маски Γ_w как произведения масок $\Gamma_{v\oplus 0}=P\Delta_{v\oplus 0}P^{-1}$, т. е. функции B_v, полученные ограничением на V масок $\Gamma_{v\oplus 0}$, которые служат в этой ситуации аналогами функций Уолша.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Логинов В. П.** Функции Уолша и области их применения.— «Зарубеж. радиоэлектроника», 1973, т. 4, с. 73.
2. **Холл М.** Комбинаторика. М., «Мир», 1970.
3. **Серр Ж.-П.** Линейные представления конечных групп. М., «Мир», 1970.
4. **Ленг С.** Алгебра. М., «Мир», 1968.
5. **Берлекэмп. Э.** Алгебраическая теория кодирования. М., «Мир», 1971.

6. **Ahmed N., Bates R. M.** A power spectrum and related physical interpretation for the multidimensional BJFORE transform.— "IEEE Trans. on Electromagn. Compatib.", 1971, vol. 3, p. 38.
7. **Helm H. A.** Group codes and Walsh functions.— "IEEE Trans. on Electromagn. Compatib.", 1971, vol. 3, p. 78.

Поступила в редакцию 21 июня 1977 г.

УДК 621.397 : 681.735

Ю. С. БУХОНИН, В. Б. ШЛИШЕВСКИЙ
(Новосибирск)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ КОДИРОВАНИЯ НЕКОГЕРЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В настоящее время в спектрометрии [1—5] и технике получения [6, 7] и анализа [8—13] изображений находят все большее применение различные методы кодирования некогерентных оптических сигналов. Цель кодирования заключается в повышении помехозащищенности оптических систем или улучшении других их характеристик. Это возможно при наиболее полном использовании энергии оптических сигналов за счет увеличения светосилы приборов или мультиплексности пространственно-временного преобразования оптических сигналов в электрические. Такое кодирование и декодирование может быть описано двумя линейными и в идеальном случае взаимно-обратными интегральными преобразованиями. Широкое распространение получили системы, в которых оба преобразования осуществляются оптическими средствами, т. е. ядра преобразований и интегрируемые функции неотрицательны. При этом наибольшей простотой технической реализации обладают системы, в которых кодирование и декодирование сводится к инвариантным линейным преобразованиям с одинаковыми ядрами. Существенным недостатком реальных систем такого типа является наличие большой постоянной составляющей и побочных максимумов у аппаратных функций (АФ).

В статье рассматривается условие отсутствия постоянной составляющей и побочных максимумов у АФ-систем подобного рода и на примере двойного растрового монохроматора (ДРМ) показано, что существует метод кодирования некогерентных оптических сигналов, позволяющий это условие реализовать практически.

1. Пусть оптическая система последовательно осуществляет два линейных инвариантных преобразования некогерентного оптического сигнала, описываемого одномерной, двумерной и т. д. действительной функцией $B(\boldsymbol{a})$, т. е.

$$\int B(\boldsymbol{a})\,\tau(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\,d\boldsymbol{a}=\widetilde{B}(\boldsymbol{b});\quad \int \widetilde{B}(\boldsymbol{b})\,\tau(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}')\,d\boldsymbol{b}=B'(\boldsymbol{a}'), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ — векторы параметров, ядра преобразований $\tau(\boldsymbol{b})\leqslant 1$ — действительные неотрицательные функции, а интегралы здесь и далее берутся по области задания подынтегральных функций. АФ такой инвариантной по $\boldsymbol{a}$ системы представляет собой ее отклик в точке $\boldsymbol{a}'$ на импульсное входное воздействие в точке $\boldsymbol{a}$ и описывается выражением

$$R(\Delta\boldsymbol{a})=\int \tau(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\tau(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}')d\boldsymbol{b}=\int\tau(\boldsymbol{b})\tau(\boldsymbol{b}-\Delta\boldsymbol{a})\,d\boldsymbol{b} \tag{2}$$

($\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}$). В идеальном случае должно было бы выполняться равенство $B'(\boldsymbol{a}')=GB(\boldsymbol{a})$, где $G=\text{const}$. Для этого входной сигнал $B(\boldsymbol{a})$