АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 1979

# МЕТОДЫ И УСТРОЙСТВА ОБРАБОТКИ ОПТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 535.4

О. Е. ТРОФИМОВ
*(Новосибирск)*

## О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ФАЗОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ВОЛНОВЫХ СИГНАЛОВ

Рассматривается задача выбора фазосдвигающей пластинки с целью максимизации модуля амплитуды поля в заданной точке для двух длин волн одновременно. Комплексную амплитуду поля в точке наблюдения полагаем равной [1]

$$A(\lambda)=\frac{1}{i\lambda z}\iint\limits_{R}\exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}i\left(\sqrt{z^2+x^2+y^2}+(n(\lambda)-1)\,l(x,y)\right)\right)dxdy. \quad (1)$$

Здесь $\lambda$ — длина волны, $R$ — круг радиуса $R$ с центром в начале координат, $n(\lambda)$ — показатель преломления, $l(x, y)$ — толщина фазосдвигающей пластинки в точке $(x, y, 0)$, точка наблюдения имеет координаты $(0, 0, z)$.

Если в выражении (1) функцию $l(x, y)$ заменить на функцию $l_1(x, y)=l(x, y)+N(x,y)\lambda/(n(\lambda)-1)$, где $N(x,y)$ принимает целые значения, то $|A(\lambda)|$ не изменится. В работах [2], [3] этот факт используется для построения различных способов улучшения свойств оптических систем; фиксируется функция $N(x,y)$, сохраняющая $|A(\lambda)|$ для некоторой опорной длины волны, и изучается поведение $|A(\lambda)|$ для других $\lambda$; показана принципиальная возможность использования таких приемов для существенного улучшения свойств оптических систем. Задача, рассматриваемая в настоящей заметке, заключается в том, что при заданных $\lambda_1$, $\lambda_2$, $R$, $z$, $n(\lambda_1)$, $n(\lambda_2)$ выбрать $l(x,y)$ так, чтобы сделать как можно большими величины $|A(\lambda_1)|^2$ и $|A(\lambda_2)|^2$. Заметим, что

$$|A(\lambda)|\leqslant \pi R^2/(\lambda z). \quad (2)$$

Если $n(\lambda_1)=n(\lambda_2)$ и $\lambda_1/\lambda_2=m_2/m_1$, где $m_1$ и $m_2$ — целые числа, то, выбирая $l(x, y)$ из условия

$$\sqrt{z^2+x^2+y^2}+(n(\lambda_1)-1)\,l(x,y)=\lambda_1 m_1=\lambda_2 m_2, \quad (3)$$

получаем

$$A(\lambda_k)=\frac{1}{i\lambda_k z}\iint\limits_{R}\exp 2\pi i m_k\,dxdy \quad (k=1,2). \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует, что $|A(\lambda_1)|$, $|A(\lambda_2)|$ одновременно принимает максимально возможные значения. Рассмотрим теперь случай $n(\lambda_1)\neq n(\lambda_2)$. Нас будет интересовать величина

$$\max_{l(x,y)}\min\left(|J(\lambda_1)|^2,\ |J(\lambda_2)|^2\right), \quad (5)$$

$$|J(\lambda)|^2 = \int \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\rho(x) - \rho(y) + k(\lambda)(l(x) - l(y)))\right] ds \qquad (6)$$

(интеграл четырехкратный, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $ds=dx_1dx_2dy_1dy_2$, $\rho(x) = \sqrt{z^2 + x_1^2 + x_2^2}$ $k(\lambda) = n(\lambda) - 1$). Учитывая, что для любых функций

$$\min\left(\int f(x)\,dx, \int g(x)\,dx\right) \geqslant \int \min(f(x), g(x))\,dx, \qquad (7)$$

приходим к неравенству

$$\max_l \min(|J(\lambda_1)|^2, |J(\lambda_2)|^2) \geqslant \int \max_l \min\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda_2}(\rho(x) - \rho(y)) + \right.$$

$$\left. + k(\lambda_1)(l(x) - l(y)), \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}(\rho(x) - \rho(y)) + k(\lambda_2)(l(x) - l(y))\right)\right) ds. \qquad (8)$$

Рассмотрим подынтегральную функцию. С учетом периодичности имеем для нее выражение

$$\max_l \min_r \left(\cos\left(2\pi\left\{\frac{\rho(x)}{\lambda_r} + \frac{k(\lambda_r)}{\lambda_r}l(x)\right\} - \left\{\frac{\rho(y)}{\lambda_r} + \frac{k(\lambda_r)}{\lambda_r}l(y)\right\}\right)\right), \quad r = 1, 2, \qquad (9)$$

где $\{a\}$ означает дробную часть $a$.

Максимум по всем $l(x)$ не меньше максимума по таким $l(x)$, для которых при всех $x$ выполняется условие

$$\left\{\frac{\rho(x)}{\lambda_1} + \frac{k(\lambda_1)}{\lambda_1}l(x)\right\} = \left\{\frac{\rho(x)}{\lambda_2} + \frac{k(\lambda_2)}{\lambda_2}l(x)\right\}. \qquad (10)$$

При выполнении условия (10) минимизируемые выражения равны между собой. В связи с условием (10) сделаем следующее замечание. Пусть задано выражение

$$\max_y \min\left(\cos(a_1 + b_1 y), \cos(a_2 + b_2 y)\right). \qquad (11)$$

Рассмотрим последовательность точек $y$, удовлетворяющих условию

$$\cos(a_1 + b_1 y) = \cos(a_2 + b_2 y). \qquad (12)$$

Максимум по $y$ (11) может достигаться лишь в точках, удовлетворяющих условию (12). Таким образом, при отыскании максимума функции $g(y)$ можно ограничиться такими $l(x)$, для которых выполняется равенство

$$\cos\left(2\pi\left(\frac{\rho(x)}{\lambda_1} + \frac{k(\lambda_1)}{\lambda_1}l(x) - \frac{\rho(y)}{\lambda_1} - \frac{k(\lambda_1)}{\lambda_1}l(y)\right)\right) = \cos\left(2\pi\left(\frac{\rho(x)}{\lambda_2} + \frac{k(\lambda_2)}{\lambda_2}l(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\rho(y)}{\lambda_2} - \frac{k(\lambda_2)}{\lambda_2}l(y)\right)\right). \qquad (13)$$

Условия (10) сильнее, чем (13), и в связи с этим можно говорить лишь об оценках максимума. Однако их использование позволяет существенно упростить отыскание экстремальных решений. Условие (10) эквивалентно равенству

$$\frac{\rho(x)}{\lambda_1} + \frac{k(\lambda_1)}{\lambda_1}l(x) = \frac{\rho(x)}{\lambda_2} + \frac{k(\lambda_2)}{\lambda_2}l(x) + s(x), \qquad (14)$$

где $s(x)$ — целое. Из (14) получаем

$$l(x) = \rho(x) \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} s(x). \tag{15}$$

Подставляя $l(x)$ в (9) и учитывая (10), приходим к максимизации по целым $s$ выражения

$$\cos\left(2\pi\left(\left\{\rho(x) \frac{k(\lambda_1) - k(\lambda_2)}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} + \frac{k(\lambda_1)\lambda_2}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} s(x)\right\} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left\{\rho(y) \frac{k(\lambda_1) - k(\lambda_2)}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} + \frac{k(\lambda_1)\lambda_2}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} s(y)\right\}\right)\right). \tag{16}$$

Если

$$\frac{k(\lambda_1)\lambda_2}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} \quad \frac{m}{n}, \tag{17}$$

где $m, n$ — целые взаимно-простые числа, то можно выбрать такое целое $s(x)$, что выполняется неравенство

$$\left\{\rho(x) \frac{k(\lambda_1) - k(\lambda_2)}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} + \frac{k(\lambda_1)\lambda_2}{\lambda_2 k(\lambda_1) - \lambda_1 k(\lambda_2)} s(x)\right\} < \frac{1}{n}. \tag{18}$$

Равенство (15) позволяет найти $l(x)$ по $s(x)$. Итак, при выполнении условия (17) можно выбрать $l(x)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\min(|J(\lambda_1)|^2, \ |J(\lambda_2)|^2) \geqslant \cos(2/n)(\pi R^2)^2. \tag{19}$$

Напомним, что $|J(\lambda)| \leqslant \pi R^2$.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы. Если $n(\lambda_1) = n(\lambda_2)$, то можно выбрать $l(x_1, x_2)$ — форму фазосдвигающей пластинки — так, чтобы $|A(\lambda_1)|$, $|A(\lambda_2)|$ — модули комплексных амплитуд в точке наблюдения — одновременно достигали максимально возможных значений. Если $n(\lambda_1) \neq n(\lambda_2)$, то при выполнении специальных условий (равенство (17) при больших $n$) можно выбрать $l(x)$ так, чтобы $|A(\lambda_1)|$, $|A(\lambda_2)|$ были одновременно достаточно близки к своим максимально возможным значениям (неравенство (19)).

Мы рассмотрели задачу определения $\max\limits_{l(x,y)} \min(|J(\lambda_1)|^2, J(\lambda_2)|^2)$ и соответствующей функции $l(x, y)$. Представляет также интерес задача определения функции $l(x, y)$, максимизирующей $|J(\lambda_2)|$ при условии, что $|J(\lambda_1)| = \pi R^2$. Везде далее будем полагать $\pi R^2 = 1$. Равенства $|J(\lambda_1)| = 1$, $|J(\lambda_2)| = 1$ эквивалентны системе уравнений:

$$\begin{aligned} \rho(x)/\lambda_1 + (k(\lambda_1)/\lambda_1)\, l(x) &= \alpha_1 + N_1(x); \\ \rho(x)/\lambda_2 + (k(\lambda_2)/\lambda_2)\, l(x) &= \alpha_2 + N_2(x), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$ не зависят от $x$, а $N_1(x)$, $N_2(x)$ принимают целые значения для всех $x$. Как и ранее, $x$ означает точку на плоскости, т. е. $x = (x_1, x_2)$. В общем случае не существует $l(x)$, удовлетворяющей уравнениям (20) одновременно. Однако можно искать решение одного уравнения, минимизирующее разность с правой частью второго. Из первого уравнения получаем

$$l(x) = \frac{(\alpha_1 + N_1(x))\lambda_1 - \rho(x)}{k(\lambda_1)}. \tag{21}$$

Здесь $N_1(x)$ — произвольная функция, принимающая целые значения для всех $x$. Подставляя $l(x)$ во второе уравнение, получаем

$$\frac{\rho(x)(k(\lambda_1) - k(\lambda_2))}{\lambda_2 k(\lambda_1)} + \frac{\lambda_1 k(\lambda_2)}{\lambda_2 k(\lambda_1)} + N_1(x) \frac{k(\lambda_2)\lambda_1}{k(\lambda_1)\lambda_2} = \beta_2 + N_2(x) + \varphi(x), \tag{22}$$

причем $0 \leqslant \varphi(x) < 1$. Нам нужно найти такие $N_1(x)$ и $\beta_2$, чтобы $\varphi(x)$ было минимальным. Заметим, что если $k(\lambda_1) = k(\lambda_2)$, то, полагая $N_1(x) = 0$, $\beta_2 = \lambda_1 k(\lambda_2)/(\lambda_2 k(\lambda_1))$, определяем $\varphi(x) = 0$. Уравнения (20) в этом случае линейно зависимы, у них есть общее решение. Рассмотрим общий случай.

Пусть

$$\{k(\lambda_2)\lambda_1/(\lambda_2 k(\lambda_1))\} = p/q, \tag{23}$$

где $p$ и $q$ — взаимно-простые целые числа, $q < p$. Если $N$ принимает все целые значения от 1 до $p$, то $\{Nq/p\}$ — все значения вида $s/p\,(0 \leqslant s \leqslant p-1)$. Выбирая $N(x)$ так, что

$$s = \left[\left\{\frac{\rho(x)(k(\lambda_1) - k(\lambda_2))}{\lambda_2 k(\lambda_1)}\right\} p\right], \tag{24}$$

получаем $|\varphi(x)| \leqslant 1/p$ ($[x]$ — целая часть $x$). Определив $N(x)$, функцию $l(x)$ находим из условия (21). Для построенной таким образом $l(x)$ имеем

$$J_1 = 1, \quad J_2 \geqslant 1 - 1/p. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь влияние погрешностей при определении $k(\lambda)$ и $\rho(x)$ на полученные оценки. Через $\Pi(a)$ будем обозначать модуль разности между истинным значением $a$ и тем значением, которое использовалось при построении $l(x)$.

Если

$$\Pi\left(\frac{k(\lambda_2)\lambda_1}{k(\lambda_1)\lambda_2}\right) < \varepsilon, \quad \Pi\left(\frac{\rho(x)(k(\lambda_1) - k(\lambda_2))}{\lambda_2 k(\lambda_1)}\right) < \delta, \tag{26}$$

то получаем оценки

$$J_1 \geqslant 1 - \varepsilon - \delta, \quad J_2 \geqslant 1 - 1/p - \varepsilon p - \delta. \tag{27}$$

Из оценок (27), в частности, следует, что для выполнения условия $J_2 \sim 1 - 1/p$ необходимо, чтобы погрешность в определении величины $k(\lambda_2)\lambda_1/(k(\lambda_1)\lambda_2)$ была существенно меньше $1/p$.

Рассмотрим пример. Пусть

$$\lambda_1 = 656{,}3 \text{ нм}; \; k(\lambda_1) = n(\lambda_1) - 1 = 0{,}4564;$$

$$\lambda_2 = 480 \text{ нм}; \quad k(\lambda_2) = n(\lambda_2) - 1 = 0{,}4636.$$

Будем использовать первые три знака величин $\lambda_i$, $k(\lambda_i)$:

$$\gamma_0 = \frac{k(\lambda_1)\lambda_2}{k(\lambda_2)\lambda_1} = \frac{456 \cdot 480}{463 \cdot 656} = \frac{228 \cdot 60}{463 \cdot 41}. \tag{28}$$

Правая часть равенства (28) является несократимой дробью. При заданном $\gamma_0$ для любого $\alpha$ выражение $\{\alpha + N\gamma_0\}$ соответствующим выбором $N$ можно сделать меньше $1/463 \cdot 41$. Однако, учитывая, что $\lambda_i$ и $k(\lambda_i)$ заданы не точно, и полагая, что первые три знака известны достоверно, получаем оценку

$$\Pi(\gamma) \leqslant 0{,}004 = \varepsilon. \tag{29}$$

Поскольку $J \geqslant 1 - 1/p - \varepsilon p$, то при заданных точностях определения $\lambda_i$ и $k(\lambda_i)$ мы не можем найти оценку лучше чем $J \geqslant 1 - 0{,}004 = 1 - \varepsilon$.

Более того, минимизируя выражение $1/p - \varepsilon p$ при заданном $\varepsilon$, получаем, что наилучшая возможная оценка достигается при $p = \varepsilon^{-1/2}$ и имеет вид $J \geqslant 1 - 2 \cdot \varepsilon^{-1/2}$. Для действительного значения $\gamma$ имеем оценки $\gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma + \varepsilon$. В нашем случае $0{,}806 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}81$. Для построения оценки нам нужно рассмотреть несократимые дроби $q/p$, лежащие в интервале $(\gamma_0, \gamma_0 + \varepsilon)$, и найти среди них такую, чтобы величина $1/p + \varepsilon p$ принимала достаточно малое значение. В рассматриваемом примере $0{,}806 \leqslant 13/15 \approx 0{,}8066 \leqslant 0{,}81$. Таким образом, в этом случае может быть найдена оценка $J_2 \geqslant 1 - 1/15 - 0{,}004/15$, т. е. для второй длины волны можно получить 87% от максимально возможного значения.

Выше рассматривалась задача при условии, что фазовый преобразователь однослойный. Если использовать двухслойный преобразователь и выбрать $k_j(\lambda_i)$ так, чтобы соответствующий определитель был не равен нулю, то можно найти $l_1(x)$ и $l_2(x)$, для которых выполняются равенства $J(\lambda_1) = 1 = J(\lambda_2)$. Однако, используя изложенную выше процедуру, можно выбрать $l_1(x)$ и $l_2(x)$ так, чтобы не только обеспечить равенства $J(\lambda_1) = 1 = J(\lambda_2)$, но и максимизировать величину $J(\lambda_3)$ для некоторой третьей длины волны $\lambda_3$. Действительно, для трех длин волн и двухслойного преобразователя имеем систему уравнений ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{\rho(x)}{\lambda_i} + \frac{k_1(\lambda_i)}{\lambda_i} l_1(x) + \frac{k_2(\lambda_i)}{\lambda_i} l_2(x) = \alpha_i + N_i(x). \tag{30}$$

Решая, например, первые два уравнения и подставляя решение в третье, приходим к задаче минимизации дробной части выражения

$$\rho(x) A + N_1(x) B + N_2(x) C. \tag{31}$$

Минимизация производится по всевозможным целым $N_1(x)$ и $N_2(x)$. Коэффициенты в (31) стандартным образом выражаются через коэффициенты и определители (30). Например,

$$B = D_1 \lambda_1 / D \lambda_3.$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} k_1(\lambda_1) & k_1(\lambda_2) \\ k_2(\lambda_1) & k_2(\lambda_2) \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} k_1(\lambda_3) & k_2(\lambda_3) \\ k_1(\lambda_2) & k_2(\lambda_2) \end{vmatrix}.$$

Если теперь $B = q_1/p_1$, $C = q_2/p_2$, где $(p_i, q_i) = 1$, то дробная часть (27) может быть сделана меньше, чем $(p_1 p_2)/(p_1 p_2)$ ($(p_1 p_2)$ — наибольший общий делитель). В частности, если $p_1$, $p_2$ — взаимно-простые числа, то получаем оценку $J_3 \geqslant 1 - 1/(p_1 p_2)$.

Автор выражает благодарность В. П. Коронкевичу, Р. Д. Баглаю, М. Л. Аграновскому, К. К. Смирнову за полезное обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гудмен Дж.** Введение в Фурье-оптику. М., «Мир», 1970.
2. **Слюсарев Г. Г.** Оптические системы с фазовыми слоями.— ДАН СССР, 1957, т. 113, с. 780.
3. **Тудоровский А. И.** Объектив с фазовой пластинкой.— «Опт. и спектр.», 1959, т. VI, вып. 2, с. 68.

*Поступила в редакцию 11 апреля 1978 г.*