частоты биений ω к изменению Δl составляет $\sim 27 \cdot 10^4 \frac{\text{Гц}}{\text{отн. ед.}}$ (при $\xi_0 = 50$ МГц).

Таким образом, для обеспечения точности измерений ЛГ порядка 0,05 град/ч требуется стабильность $\Delta l \approx 3 \cdot 10^{-7}$.

На рис. 1 приведены результаты расчета зависимостей $\Delta I^0 = f(\Delta l)$ и $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = f(\Delta l)$, где ω_0 рассчитывалось при $\Delta l = 10^{-5}$. Линейный характер приведенных зависимостей позволяет построить зависимость $\Delta\omega$ (Гц) $= f(\delta\Delta I^0)$ (рис. 2), позволяющую рассчитывать поправку $\Delta\omega$ по измерениям ΔI^0 и корректировать выходной сигнал ЛГ. Проведенные расчеты показывают, что поправка $\Delta\omega$ может быть вычислена по формуле

$$\Delta\omega\,(\text{Гц}) = K_2 \delta(\Delta I^0), \tag{8}$$

где

$$\delta(\Delta I^0) = \frac{\Delta I^0_{\text{тек}} - \Delta I^0_{\text{ном}}}{\Delta I^0_{\text{ном}}}; \tag{9}$$

$K_2 = \text{const}$ (для одного из образцов ЛГ $K_2 \approx 0{,}03$ Гц/процент).

Для обеспечения точности ЛГ 0,05 град/ч (стабильность $\Delta l \approx 3 \cdot 10^{-7}$) необходимо измерять $\Delta I^0_{\text{тек}}$ с точностью не хуже 3%.

Из изложенного следует алгоритм автоматической коррекции показаний ЛГ:

1. Фиксируется значение $\Delta I^0_{\text{ном}}$ при $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0$, устанавливаемом в начале работы ЛГ ($\boldsymbol{P}_0$ соответствует $\Delta\omega = 0$).

2. В процессе работы измеряется $\Delta I^0_{\text{тек}}$ и вычисляется значение $\delta(\Delta I^0)$ по формуле (8).

3. По формуле (7) с рассчитанным или измеренным коэффициентом K_2 определяется поправка $\Delta\omega$ [Гц].

Отметим, что предложенный метод автоматической коррекции показаний ЛГ может служить для повышения точности прибора при нестабильности любого из его параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мочалов А. В., Мынбаев Д. К.** Комплексная стабилизация параметров лазерного гироскопа.— «Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина)», 1974, вып. 152, с. 40—44.
2. **Федоров Б. Ф., Шереметьев А. Г., Умников В. Н.** Оптический квантовый гироскоп. Л., «Машиностроение», 1973, гл. 5.
3. **Aronowitz F., Killpatrick J., Callaghan S.** Power-dependent correction to the scale factor in the laser gyro.— "IEEE J. of Guant. Electron", 1974, vol. DE-10, N 2, p. 201—208.

Поступило в редакцию 4 августа 1977 г.

УДК 535-14

А. Н. КОЛЕСНИКОВ

(*Новосибирск*)

СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Цель данной работы — нахождение распределения числа фотоотсчетов, индуцированных тепловым излучением, промодулированным детерминированной функцией, для определения характеристик фотоэлектронных приборов.

Представим электрическое поле нестационарного излучения в виде произведения стационарного хаотического поля $\mathscr{E}(t)$ на модулирующую функцию $\sqrt{f(t)}$ $\left(0 \leqslant f(t) \leqslant 1;\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt < \infty\right)$:

$$\mathscr{E}_f(t) = \sqrt{f(t)}\,\mathscr{E}(t). \tag{1}$$

Очевидно, что корреляционная функция модулированного излучения $\Gamma_f(t_1, t_2)$ связана с корреляционной функцией $\Gamma(t_1 - t_2)$ стационарного хаотического поля следующим образом:

$$\Gamma_f(t_1, t_2) = \sqrt{f(t_1) f(t_2)}\ \Gamma(t_1 - t_2).$$

Решению этой задачи для случая

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ 0, & t < 0,\ t > T \end{cases}$$

посвящено много работ (см., например, [1—5] и библиографию к ним). Другой частный случай рассмотрен в [6], где получены приближенные решения для некоторых типов периодической модуляции в предположении малости интервала наблюдения T_0 по сравнению со временем когерентности τ_c излучения и периодом модулирующей функции.

2. Если модулированное поле разложить по ортонормированному с весом $f(t)$ набору функций $\{\psi_k(t)\}$, удовлетворяющему условию статистической независимости коэффициентов разложения (процедура, аналогичная разложению стационарного поля на конечном временном интервале в [1, 4, 8]):

$$\mathscr{E}_f(t) = \sum_k C_k \psi_k(t), \tag{2}$$

где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t)\, \psi_j(t)\, f(t)\, dt = \delta_{ij}$; $\langle C_i C_j^* \rangle = \Gamma_i \delta_{ij}$, то интегральная интенсивность излучения E, определяемая как

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}_f(t)\, \mathscr{E}_f^*(t)\, dt,$$

разобьется на сумму интенсивностей независимых тепловых источников

$$E = \sum_k |C_k|^2$$

с плотностями вероятностей

$$p(|C_k|^2) = \frac{1}{\Gamma_k} \exp\left\{-\frac{|C_k|^2}{\Gamma_k}\right\}.$$

Средние интенсивности источников $\langle |C_k|^2 \rangle = \Gamma_k$ являются собственными числами интегрального уравнения

$$\Gamma_k \psi_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t - \tau)\, \psi_k(\tau)\, f(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Характеристическая функция $\varphi(s)$ распределения фотоотсчетов в силу независимости источников представляется в виде произведения характеристических функций распределений фотоотсчетов от элементарных тепловых источников [2, 4]:

$$\varphi(s) = \langle \exp[(e^{is} - 1)\, \alpha E] \rangle = \prod_k \left[1 + \alpha \Gamma_k (1 - e^{is})\right]^{-1}, \tag{4}$$

α — чувствительность фотодетектора.

Учитывая, что распределение фотоотсчетов дается обратным фурье-преобразованием характеристической функции $\varphi(s)$, получаем в случае неодинаковых собственных чисел ($\Gamma_i \neq \Gamma_j$; $i \neq j$)

$$p(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ins} \varphi(s)\, ds = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha\Gamma_j)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\alpha\Gamma_j}\right)^{-n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \left(1 - \frac{\Gamma_k}{\Gamma_j}\right)^{-1}. \tag{5}$$

При этом среднее число фотоотсчетов

$$m = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j = \alpha\Gamma(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \alpha\Gamma(0)\, T \tag{6}$$

а дисперсия числа фотоотсчетов

$$\sigma^2 = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j + \alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^2 = m\left(1 + m\frac{\tau_f^2}{T_f^2}\right), \tag{7}$$

где

$$\tau_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\tau)|^2 f_1(\tau) d\tau / \Gamma^2(0)$$

и

$$f_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) f(t)\, dt.$$

Точное решение интегрального уравнения (3) и нахождение собственных чисел Γ_k представляют собой громоздкую задачу. Можно воспользоваться тем фактом, что сумма степеней собственных чисел выражается через интеграл соответствующей кратности от произведения корреляционных функций $\Gamma(t_i - t_{i+1})$ с весом $f(t_i)$ [8]:

$$\sum_k \Gamma_k^n = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 f(t_1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n f(t_n)\, \Gamma(t_1 - t_2) \ldots \Gamma(t_n - t_1), \tag{8}$$

представив характеристическую функцию (4) в виде

$$\varphi(s) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n (e^{is} - 1)^n}{n} \sum_k \Gamma_k^n\right\}. \tag{9}$$

Соотношения (8) и (9) позволяют в принципе найти характеристическую функцию числа фотоотсчетов, не прибегая к решению интегрального уравнения (3).

Остановимся на случае, когда характерное время модулирующей функции T_f существенно превосходит время когерентности $\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\tau)|^2 d\tau / \Gamma^2(0)$ излучения и среднее число фотоотсчетов m не слишком велико, т. е. когда параметр вырождения излучения $\delta = m\tau_c/T_f$ достаточно мал: $\delta \ll 1$. Ограничившись в сумме (9) первым членом, получаем, что характеристическая функция числа фотоотсчетов в первом приближении равна $\varphi(s) \simeq \exp\{m(e^{is} - 1)\}$, что соответствует распределению Пуассона с параметром m. В случае больших значений m число фотоотсчетов распределено асимптотически нормально со средним m и дисперсией σ^2, определяемой выражением (7) (по-прежнему $\tau_c \ll T_f$, но $m \gg 1$).

3. Рассмотрим далее случай, представляющий практический интерес,— экспоненциальную модуляцию излучения:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\varkappa t}, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Такому закону подчиняется, например, затухание излучения некоторого типа люминофоров [9].

Найдем распределение фотоотсчетов, индуцированных экспоненциально модулированным тепловым излучением со спектром мощности Лоренца [2]:

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \frac{2\gamma\Gamma(0)}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

Решение интегрального уравнения (3)

$$\Gamma_k \psi_k(t) = \int_0^{\infty} \Gamma(0)\, e^{-\varkappa\tau - \gamma|t-\tau| + i\omega_0(t-\tau)} \psi_k(\tau)\, d\tau \tag{10}$$

выражается через функцию Бесселя первого рода, удовлетворяющую условию ортонормировки:

$$\psi_k(t) = A_k J_\nu\left(a_k e^{-\frac{\varkappa t}{2}}\right) e^{i\omega_0 t}, \tag{11}$$

где $\nu=2\gamma/\varkappa$ — порядок функции Бесселя, a_k — корни функции Бесселя $(\nu-1)$ порядка $J_{\nu-1}(a_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Собственные числа Γ_k определяются следующим образом:

$$\Gamma_k = \frac{4\nu\Gamma(0)}{\varkappa a_k^2}. \tag{12}$$

Используя представление функции Бесселя в виде бесконечного произведения [8], преобразуем характеристическую функцию

$$\varphi(s) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{4m\nu}{a_k^2}(1-e^{is})\right)^{-1}; \quad m=\alpha\Gamma(0)\varkappa^{-1} \tag{13}$$

к виду

$$\varphi(s) = \left(1 + m(e^{is}-1) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^k(1-e^{is})^k}{k!}\,\frac{\nu^{k-1}}{(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)}\right)^{-1}. \tag{14}$$

Как нетрудно видеть, в предельных случаях характеристическая функция соответствует распределению Пуассона $(\nu\gg1,\ m/\nu\ll1)$ и распределению Бозе — Эйнштейна $(\nu\ll1)$.

Подставляя формулу (12) в (5), получаем распределение фотоотсчетов

$$p(n) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_j^2}{4m\nu}\right)^{-n}\left(1+\frac{4m\nu}{a_j^2}\right)^{-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\left(1-\frac{a_j^2}{a_k^2}\right)^{-1} \tag{15}$$

или, используя вышеупомянутое разложение функции Бесселя и другие функциональные соотношения из [8],

$$p(n) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_j^2}{4m\nu}\right)^{-n}\left(1+\frac{4m\nu}{a_j^2}\right)^{-1}\frac{\left(\frac{a_j}{2}\right)^{\nu-2}}{\Gamma(\nu)\,J_\nu(a_j)} \tag{16}$$

(здесь $\Gamma(\nu)$ означает Г-функцию). Среднее и дисперсия числа фотоотсчетов определяются соотношениями $m=\alpha\Gamma(0)\varkappa^{-1}$, $\sigma^2 = m\left(1+\frac{m}{\nu+1}\right)$.

Если характерное время затухания $T_f=\varkappa^{-1}$ значительно меньше времени когерентности излучения $\tau_c=\gamma^{-1}$ (т. е. $\nu\ll1$), то распределение фотоотсчетов подчиняется закону Бозе — Эйнштейна с параметром m. В обратном случае $(T_f\gg\tau_c,\ \delta\ll1)$ распределение фотоотсчетов равно пуассоновскому с тем же параметром m.

В заключение оценим распределение числа фотоэлектронов, рождающихся в каскаде усиления электронно-оптического преобразователя (ЭОП). Люминесцентная вспышка света, порожденная ударом фотоэлектрона с предыдущего каскада, инициирует рождение на фотокатоде каскада некоторого количества фотоэлектронов со средним числом $m=10\div100$. Полагая время когерентности излучения $\tau_c=10^{-11}\div10^{-12}$ с, характерное время длительности вспышки $T_f=10^{-4}\div10^{-5}$ с, получаем значение параметра вырождения $\delta<10^{-4}\ll1$. Поэтому в первом приближении можно считать, что распределение коэффициента усиления каскада ЭОП подчиняется закону Пуассона.

Автор выражает благодарность к. т. н. В. М. Ефимову и к. ф.-м. н. А. М. Искольдскому за постоянный интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Jakeman E., Pike E. R.** The intensity-fluctuation distribution of gaussian light.— "J. Phys. A: Gen. Phys.", 1968, vol. 1, p. 128.
2. **Клаудер Дж., Сударшан Э.** Основы квантовой оптики. М., «Мир», 1970.
3. **Шереметьев А. Г.** Статистическая теория лазерной связи. М., «Связь», 1971.
4. **Перина Я.** Когерентность света. М., «Мир», 1974.
5. **Srinivasan S. K., Sukavanam S.** Photocount statistics of gaussian light of arbitrary spectral profile.— "J. Phys. A: Gen. Phys.", 1971, vol. 5, p. 682.
6. **Diament P., Teich M. C.** Photoelectron — counting distributions for irradiance-modulated radiation.— "J. Opt. Soc. Amer.", 1970, vol. 60, p. 682.
7. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций. М., ИЛ., 1949.
8. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
9. **Гаванин В. А., Берковский А. Г.** Вакуумные фотоэлектронные приборы. М., «Энергия», 1976.

Поступило в редакцию 27 апреля 1978 г.