является заниженной и ее применение в аппаратурных разработках может привести к значительным ошибкам для сигналов, отличных от белого шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Оппенгейм А., Вайнштейн К.** Влияние конечной длины регистра при цифровой фильтрации и быстром преобразовании Фурье.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 8, с. 62—74.
2. **James D. V.** Quantization errors in FFT.— "IEEE Trans. on ASSP", 1975, vol. 23-ASSP, N 3, p. 277—283.
3. **Галаган В. Г., Шубс Ю. В.** Гибридные методы вычисления коэффициентов Фурье.— «Вестник КПИ. Сер. радиотехника и электроакустика», 1977, № 14, с. 40—42.

Поступила в редакцию 13 октября 1976 г.;
окончательный вариант — 14 июля 1977 г.

УДК 62.507

В. И. ЛЕВИН

(Пенза)

АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

1. Постановка задачи. Автоматизация научных исследований, проектирования и конструирования требует постоянного совершенствования средств ввода и вывода из ЭВМ графической информации, а также разработки новых, более совершенных методов анализа такой информации.

Пусть задан график некоторой однозначной функции $y=f(x)$ (рис. 1). Требуется определить форму заданной кривой, т. е. соотношения между ординатами различных точек кривой. Ясно, что форма кривой, понимаемая в указанном смысле, не меняется при ее аффинных преобразованиях (например, при равномерном растяжении вдоль одной или обеих осей). Это позволяет считать форму кривой носителем существенной информации о кривой. Имея такую информацию, можно решать следующие задачи: 1) определение монотонности (немонотонности) функции f; 2) определение числа и характера ее экстремумов; 3) установление сравнительной скорости роста функции на различных участках изменения аргумента; 4) отыскание соотношений локальных экстремумов и точек глобальных экстремумов функции. Отметим, что определение формы кривой $y=f(x)$ принципиально не требует вычисления ее ординат y_i; достаточно только найти соотношения ординат y_i, соответствующих различным абсциссам x_i. Это обстоятельство приводит к тому, что анализ формы кривой при надлежащем его выполнении оказывается менее трудоемким процессом, чем полное вычисление кривой.

2. Идея решения. Разобьем интервал $[a, b]$, на котором задана функция $y=f(x)$, на $n-1$ равных подынтервалов. Для этого введем n точек деления:

$$x_1=a,\ x_2=a+h,\ x_3=a+2h,\ \ldots,\ x_{n-1}= =a+(n-2)h,\ x_n=b;\ h=(b-a)/(n-1). \tag{1}$$

Число подынтервалов и длина h каждого из них определяются в соот-

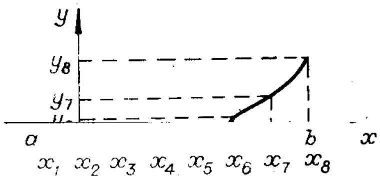

Рис. 1.

ветствии с требованиями точности анализа формы кривой. Если допустимая разность между ординатами соседних точек есть Δy^*, а производная $y'=f'(x)$ ограстью, вытекающей из (2), может быть приближенно задана системой из n точек:

$$M_1(x_1, y_1);\ M_2(x_2, y_2);\ \ldots;\ M_n(x_n, y_n). \tag{3}$$

Рассмотрим множества абсцисс $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ординат $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ точек (3). Множество X с самого начала упорядочено согласно $x_1<x_2<\ldots<x_n$. В то же время множество Y вначале является неупорядоченным, так как между ординатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ возможны различные отношения в зависимости от формы кривой $y=f(x)$. При этом очевидно, что отыскание формы кривой равносильно упорядочению множества Y. Действительно, такое упорядочение приводит к тому, что уже оба множества (X и Y) оказываются упорядоченными, и потому взаимное расположение по горизонтали и по вертикали всех точек кривой $M_1, M_2, \ldots, M_n$ становится вполне определенным. Обозначим через Y' множество, полученное упорядочением множества Y по возрастанию его элементов. Таким образом,

$$Y'=(y^1, y^2, \ldots, y^n),\ y^r \in Y,\ \text{где } y^1<y^2<\ldots<y^n.^* \tag{4}$$

Если имеется подходящий алгоритм, позволяющий путем сравнений ординат y_i выделить любую r-ю порядковую ординату y^r (т. е. указать точку x_i, такую, что $y^r=y_i$), то имеется и возможность упорядочения множества ординат Y, т. е. возможность определения формы кривой $y=f(x)$. Такой алгоритм приведен в п. 4.

Для последующего определения формы кривой целесообразно информацию, полученную при упорядочении множества ординат Y, представить в виде специальной булевой матрицы A:

$$A=\|a_{ij}\|,\quad a_{ij}=\begin{cases}1, & y_j=y^i;\\ 0, & y_j\neq y^i.\end{cases} \tag{5}$$

Как видно из (5), единица в ij-й позиции матрицы A означает, что в точке $x=x_j$ исследуемой кривой ордината $y=y_j=y^i$, т. е. является i-й по величине среди ординат всех n точек кривой. Например, матрица

$$A=\begin{Vmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{Vmatrix} \tag{6}$$

соответствует функции $y=f(x)$, у которой интервал задания разбит пятью точками деления $x_1, \ldots, x_5$ на 4 подынтервала, причем в точке

* Случай $y^i=y^j$ обсуждается в п. 8.

x_1 ордината минимальна y^1, в точке x_2 имеет третье по величине значение y^3, в точке x_3 максимальна y^5, в точке x_4 имеет четвертое y^4, а в точке x_5 — второе y^2 по величине значение.

Очевидно, что в каждом j-м столбце любой матрицы A содержится ровно одна единица. Действительно, хотя бы одна единица в j-м столбце должна быть, так как в противном случае функция $y=f(x)$ в точке $x=x_j$ не определена. Однако больше одной единицы в j-м столбце быть не может, так как это означало бы, что аргументу $x=x_j$ соответствует два или больше различных значения функции $f(x)$. Далее, как видно из (4), среди n значений ординат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ нет равных (разумеется, это определенное допущение, которое выполняется в большинстве случаев; однако для немонотонных функций иногда разбиение на подынтервалы, согласованное с требованиями точности, оказывается таким, что двум различным точкам x_i и x_j соответствуют равные ординаты $y_i=y_j$, так что указанное допущение нарушается). Поэтому в каждой i-й строке матрицы A содержится ровно одна единица. Действительно, хотя бы одна единица в i-й строке имеется, так как в одной из точек $x_1, \ldots, x_n$ функция $y=f(x)$ непременно примет i-е по величине значение y^i из множества возможных значений ординат $y_1, \ldots, y_n$. Но больше одной единицы в i-й строке не может быть, так как это означало бы существование равных среди ординат $y_1, \ldots, y_n$. Итак, матрица A является дважды стохастической булевой матрицей.

3. Связь между матрицей A и формой кривой. Пусть имеется некоторая монотонно возрастающая на интервале $[a, b]$ функция $y=f(x)$. Разобьем интервал $[a; b]$ n точками $x_1, \ldots, x_n$ согласно (1). Тогда с увеличением номера точки увеличивается соответствующая ордината, т. е. x_1 соответствует ордината $y_1=y^1$; x_2 — ордината $y_2=y^2$; $\ldots$; x_n — ордината $y_n=y^n$. Соответствующая матрица A имеет вид (здесь и ниже нули в матрице не показаны)

$$A=\begin{Vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Таким образом, согласно (7), монотонно возрастающая функция имеет побочно-диагональную матрицу A.

Пусть имеется некоторая монотонно убывающая на интервале $[a, b]$ функция $y=f(x)$ и интервал этот разбит n точками $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае с увеличением номера точки ордината уменьшается, т. е. x_1 соответствует ордината $y_1=y^n$; x_2 — ордината $y_2=y^{n-1}$; $\ldots$; x_n — ордината $y_n=y^1$. Соответствующая матрица A такова:

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Как видно из (8), монотонно убывающая функция имеет диагональную (единичную) матрицу A.

Формулы (7), (8) показывают, что расположение единиц в матрице A повторяет форму соответствующей кривой $y=f(x)$: при движении слева направо единицы в случае возрастающей функции $f(x)$ располагаются все выше, а в случае убывающей — все ниже. Эта связь между матрицей A и формой кривой $y=f(x)$ сохраняется и в общем случае, когда функция $f(x)$ немонотонная. При этом участкам возрастания соответствуют подмножества столбцов матрицы A, в пределах которых при движении слева направо единицы расположены все выше, а участкам убывания функции — подмножества столбцов, в которых при движении слева направо единицы располагаются все ниже. Однако в отличие от случая монотонных кривых здесь при переходе к соседнему столбцу единица в матрице A может сдвинуться вверх или вниз не на одну, а на несколько строк в зависимости от относительной крутизны возрастания (убывания) функции на соответствующем участке. Рассмотрим, например, функцию $f(x)$ с матрицей (6). Эта функция, судя по матрице A, на интервале $[x_1, x_3]$ возрастает, а на интервале $[x_3, x_5]$ убывает, причем в точке x_3 достигает максимума. Из матрицы A также видно, что возрастание кривой $y=f(x)$ на интервале $[x_1, x_3]$ происходит достаточно круто (при увеличении номера столбца на 1 единица в матрице поднимается на две строки), в то время как убывание кривой происходит сначала относительно полого (при переходе от столбца x_3 к x_4 единица в матрице опускается на одну строку), а затем более круто (при переходе от x_4 к x_5 единица опускается на две строки).

4. Выделение порядковых ординат. Рассмотрим методику получения по неупорядоченному множеству ординат $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответствующего упорядоченного множества $Y'=(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. В качестве математического аппарата используем бесконечнозначную логику [1, 2]. Основные ее операции двухместные:
конъюнкция —

$$a\wedge b \quad (\text{или} \quad ab)=\min\,(a,\ b), \tag{9}$$

дизъюнкция —

$$a\vee b=\max\,(a,\ b), \tag{10}$$

причем переменные a, b могут принимать произвольные континуальные значения. Обе операции подчиняются логическим законам:
тавтологии

$$a\vee a=a,\quad aa=a; \tag{11}$$

переместительному

$$a\vee b=b\vee a,\ ab=ba; \tag{12}$$

сочетательному

$$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c),\quad (ab)c=a(bc); \tag{13}$$

распределительному

$$a(b\vee c)=ab\vee ac,\ a\vee bc=(a\vee b)(a\vee c); \tag{14}$$

поглощения

$$a\vee ab=a,\ a(a\vee b)=a. \tag{15}$$

Использование законов (11)—(15) позволяет выполнять эквивалентные преобразования логических выражений, чему соответствует преобразование и в ряде случаев упрощение описываемых этими выражениями алгоритмов. Так, алгоритм, описываемый выражением $ab\vee ac$, содержит три операции (сравнения a и b, a и c, ab и ac). Преобразование этого выражения, согласно распределительному закону, дает эквивалентное выражение $a(b\vee c)$, которому соответствует алгоритм с двумя операциями.

В случае более чем двух переменных операции конъюнкции и дизъюнкции бесконечнозначной логики определяются формулами, аналогичными (9), (10). Они называются многоместными логическими операциями.

Пусть $y^r(n)$ означает r-ю по порядку величины ординату n-элементного множества ординат $\{y_1, \ldots, y_n\}$. При этом $y^1(n)$ наименьшая, а $y^n(n)$ наибольшая ординаты. Покажем, что произвольная порядковая ордината $y^r(n)$ может быть выражена функцией от аргументов $y_1, \ldots, y_n$, включающей только операции (9), (10).

Предложение 1. Соотношение между порядковыми элементами $y^r(n)$ для n-элементного множества $Y_n=\{y_1, \ldots, y_n\}$ и порядковыми элементами $y^r(n+1)$ для $(n+1)$-элементного множества $Y_{n+1}=\{y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$, полученного включением в Y_n дополнительного элемента y_{n+1}, определяется с помощью дизъюнкций и конъюнкций бесконечнозначной логики таким образом:

$$y^r(n+1)=\begin{cases} y^1(n)\, y_{n+1}, & r=1 \quad \text{(а)};\\ y^r(n)\, y_{n+1} \vee y^{r-1}(n), & r=2, 3, \ldots, n \quad \text{(б)};\\ y^{r-1}(n) \vee y_{n+1}, & r=n+1 \quad \text{(в)}.\end{cases} \qquad (16)$$

Доказательство. Запишем, используя многоместную конъюнкцию в бесконечнозначной логике, очевидное равенство

$$y^1(n)=y_1y_2\ldots y_n. \qquad (17)$$

Согласно (17), $y^1(n+1)=y_1y_2\ldots y_{n+1}=(y_1y_2\ldots y_n)y_{n+1}=y^1(n)y_{n+1}$, что и доказывает формулу (16) для случая $r=1$. Аналогично, используя многоместную дизъюнкцию бесконечнозначной логики, запишем

$$y^n(n)=y_1\vee y_2\vee\ldots\vee y_n. \qquad (18)$$

Согласно (18), $y^{n+1}(n+1)=y_1\vee y_2\vee\ldots\vee y_{n+1}=(y_1\vee y_2\vee\ldots\vee y_n)\vee y_{n+1}=y^n(n)\vee y_{n+1}$, что доказывает формулу (16) для случая $r=n+1$. Перейдем к доказательству этой формулы для произвольного $r=2, 3, \ldots, n$. То, какой из элементов множества Y_{n+1} окажется в нем r-м ($r=2, 3, \ldots, n$), порядковым элементом $Y^r(n+1)$, зависит от положения дополнительного элемента y_{n+1}, вводимого в Y_n для получения Y_{n+1}. Если y_{n+1} больше r-го порядкового элемента $y^r(n)$ множества Y_n, то, очевидно, $y^r(n+1)$ совпадает с $y^r(n)$. Если y_{n+1} заключено между $y^{r-1}(n)$ и $y^r(n)$, то $y^r(n+1)$ совпадает с y_{n+1}. Наконец, если y_{n+1} меньше $y^{r-1}(n)$, то $y^r(n+1)$ совпадает с $y^{r-1}(n)$. Таким образом,

$$y^r(n+1)=\begin{cases} y^r(n), & \text{если } y_{n+1}\geqslant y^r(n);\\ y_{n+1}, & \text{если } y^{r-1}(n)\leqslant y_{n+1}<y^r(n);\\ y^{r-1}(n), & \text{если } y_{n+1}<y^{r-1}(n).\end{cases} \qquad (19)$$

Первые две строки формулы (19) можно объединить в одну, используя конъюнкцию бесконечнозначной логики:

$$y^r(n+1)=\begin{cases} y^r(n)\, y_{n+1}, & \text{если } y_{n+1}\geqslant y^{r-1}(n);\\ y^{r-1}(n), & \text{если } y_{n+1}<y^{r-1}(n).\end{cases} \qquad (20)$$

Условие первой строки в (20) эквивалентно другому, согласно

$$\{y_{n+1}\geqslant y^{r-1}(n)\}\rightleftarrows\{y^r(n)\,y_{n+1}\geqslant y^{r-1}(n)\}. \qquad (21)$$

Действительно, из левого условия в (21) следует правое, так как по определению $y^r(n)\geqslant y^{r-1}(n)$. С другой стороны, из правого условия в (21) следует левое, так как это условие, рассматриваемое как неравенство, имеет решение [2] $y_{n+1}\geqslant y^r(n)\geqslant y^{r-1}(n)$ либо $y^r(n)>y_{n+1}\geqslant y^{r-1}(n)$.

Аналогично условие второй строки в (20) эквивалентно другому, согласно

$$\{y_{n+1}<y^{r-1}(n)\}\rightleftarrows\{y^r(n)\,y_{n+1}<y^{r-1}(n)\}. \qquad (22)$$

Действительно, из левого условия в (22) следует правое, так как нера- определению конъюнкции $y^r(n)y_{n+1} \leqslant y_{n+1}$. Далее, из правого условия в (22) следует левое, так как это условие, рассматриваемое как неравенство, имеет единственное решение $y_{n+1} \leqslant y^r(n)$, $y^{r-1}(n)$ [второе, формальное решение: $y_{n+1} > y^r(n) < y^{r-1}(n)$ — противоречит определению $y^r(n)$]. Заменив условия в формуле (20) эквивалентными им, согласно (21) и (22), перепишем эту формулу в виде

$$y^r(n+1) = \begin{cases} y^r(n)\, y_{n+1}, & \text{если } y^r(n)\, y_{n+1} \geqslant y^{r-1}(n); \\ y^{r-1}(n), & \text{если } y^r(n)\, y_{n+1} < y^{r-1}(n). \end{cases} \tag{23}$$

Обе строки в (23) можно объединить в одну, используя дизъюнкцию бесконечнозначной логики:

$$y^r(n+1) = y^r(n)\, y_{n+1} \vee y^{r-1}(n), \quad r=2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{24}$$

С учетом (24) формула (16) теперь доказана для произвольного r.

Предложение 1 дает возможность выразить произвольную r-ю по величине ординату $y^r(n)$ множества ординат $\{y_1, \ldots, y_n\}$ в виде функции бесконечнозначной логики от аргументов $y_1, \ldots, y_n$. Действительно, обе порядковые ординаты двухэлементного множества $\{y_1, y_2\}$ выражаются по формулам (17) и (18)

$$y^1(2) = y_1 y_2, \quad y^2(2) = y_1 \vee y_2 \tag{25}$$

при помощи одной логической операции каждая: для $y^1(2)$ эта операция — конъюнкция, а для $y^2(2)$ — дизъюнкция. Далее, используя результаты (25), по рекуррентным соотношениям (16) находим выражения для всех трех порядковых ординат трехэлементного множества $\{y_1, y_2, y_3\}$:

$$y^1(3) = y^1(2)\, y_3 = (y_1 y_2)\, y_3; \quad y^2(3) = y^2(2)\, y_3 \vee y^1(2) =$$
$$= y_1 y_2 \vee (y_1 \vee y_2)\, y_3; \quad y^3(3) = y^2(2) \vee y_3 = (y_1 \vee y_2) \vee y_3. \tag{26}$$

Аналогично на базе результатов (26) с помощью соотношений (16) находим выражения для четырех порядковых ординат четырехэлементного множества x_1, x_2, x_3, x_4 и т. д. Таким образом, любую r-ю по порядку величины ординату y^r можно выразить в виде функции бесконечнозначной логики $y^r = f^r(y_1, \ldots, y_n)$, аргументы которой — все имеющиеся ординаты y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Эта функция, определяемая согласно вышеизложенному, построена только из операций дизъюнкции и конъюнкции. Она указывает, какие из ординат $y_1, \ldots, y_n$ нужно сравнить попарно, какую из сравниваемых ординат выбирать (бóльшую или меньшую) и в какой последовательности должны следовать эти сравнения, чтобы в результате получить нужную порядковую ординату y^r. Таким образом, функция f^r задает алгоритм выделения порядковой ординаты y^r. Объединив алгоритмы для выделения всех y^r, $r=1, \ldots, n$, и сократив в них повторяющиеся участки, получим алгоритм полного упорядочения множества ординат $(y_1, \ldots, y_n)$.

5. Сокращенный анализ формы кривой. В некоторых случаях полезную информацию о форме заданной кривой $y=f(x)$ можно получить, не прибегая к полному упорядочению множества ординат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а лишь выделяя отдельные характерные порядковые ординаты. Например, можно найти те точки x_i, в которых достигается максимальная y^n и минимальная y^1 ординаты. Это будут точки максимума и минимума функции $f(x)$. Можно также найти точку x_i, в которой достигается средняя по значению ордината $y^{n/2}$ (медиана) и т. д. При этом в необследуемых точках x поведение функции $y=f(x)$ интерполируется на основе результатов, полученных из обследованных точек. Это значит, что в матрице A исследуемой кривой единицы расставляются лишь в отдельных строках. Намеченный этими единицами ход кривой затем используется для расстановки единиц в остальных строках матрицы A. Получаемая таким путем приближенная информация о форме кривой требует меньшего объема вычислений, чем точная (см. п. 2).

Пусть, например, для функции $y=f(x)$, у которой интервал задания $[a, b]$ разбит пятью точками деления $x_1, \ldots, x_5$, установлено, что минимальная ордината y^1 достигается в точке x_5, максимальная y^5 — в точке x_1, средняя y^3 — в точке x^3. Отсюда получаем неполную матрицу A (в ней не заполнены 4 клетки)

$$A=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0\\0&&0&&0\\0&0&1&0&0\\0&&0&&0\\0&0&0&0&1\end{Vmatrix}. \tag{27}$$

Уже из (27) видно, что максимум (минимум) функции $y=f(x)$ достигается в точке x_1 (точка x_5). Заполним в матрице (27) пустые клетки. При этом получим два варианта матрицы A:

$$A=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{Vmatrix}(\text{а}),\quad A=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{Vmatrix}(\text{б}). \tag{28}$$

Вариант (28, б) представляется менее вероятным, особенно при небольшом интервале $[a, b]$, так как он включает два исключительно крутых изменения кривой. Остается вариант (28, а), согласно которому кривая $f(x)$ монотонно убывает на $[a, b]$.

6. Сложность анализа формы кривой. Изложенный в п. 4 алгоритм упорядочения множества ординат $Y_n=(y_1, \ldots, y_n)$ с целью определения формы кривой $y=f(x)$ итеративен по n. Благодаря этому, алгоритм упорядочения множества Y_{n+1} получается путем очевидной, вытекающей из (16) достройки алгоритма упорядочения множества Y_n. При такой достройке добавляются: одна операция — двухместная конъюнкция — для выделения порядковой ординаты $y^1(n+1)$, одна операция — дизъюнкция — для выделения ординаты $y^{n+1}(n+1)$ и по две операции — конъюнкция и дизъюнкция — для выделения каждой из ординат $y^2(n+1), y^3(n+1), \ldots, y^n(n+1)$. Общее число дополнительных операций $1+1+2(n-1)=2n$. Таким образом, сложность $N(n)$ упорядочения множества $Y_n=(y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$N(n+1)=N(n)+2n. \tag{29}$$

Полагая n в (29) равным последовательно $1, 2, \ldots, n-1$ и суммируя все полученные равенства, запишем

$$N(2)-N(1)+N(3)-N(2)+\ldots+N(n)-N(n-1)=2(1+2+3+\ldots$$
$$\ldots+n-1).$$

Отсюда после приведения подобных членов в левой части и суммиро-

2 Автометрия № 2, 1979 г.

вания в правой, учитывая начальное условие $N(1)=0$ (единственную ординату не надо выделять!), найдем

$$N(n)=0{,}5n(n-1). \tag{30}$$

Итак, сложность упорядочения множества Y_n оказывается квадратичной функцией числа n ординат. Зависимость (30) не является наилучшей возможной характеристикой роста сложности упорядочения. Однако алгоритм упорядочения (см. п. 4) с характеристикой (30) обладает важным достоинством: в нем используется только та память, в которой хранится упорядочиваемое множество.

7. Выделение порядковых ординат с запоминанием. Можно предложить алгоритм получения по неупорядоченному множеству ординат $Y_n=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ упорядоченного $Y_n'=(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, обладающий существенно лучшей характеристикой роста сложности, чем (30). Такое улучшение «оплачивается» увеличением необходимой памяти. Сущность алгоритма заключается в том, что информация, полученная при отыскании некоторой порядковой ординаты y^r в множестве Y_n, запоминается и используется при отыскании такой же порядковой ординаты $\tilde{y}^r$ в множестве $Y_n \setminus y^r$, полученном исключением y^r из Y_n. Ясно, что $\tilde{y}^r$ совпадает с y^{r+1}, так что повторение данной процедуры приводит к упорядочению множества Y_n. Для реализации алгоритма потребуется явное выражение произвольной порядковой ординаты $y^r(n)$ n-элементного множества Y_n.

Предложение 2. Порядковые ординаты $y^r(n)$-элементного множества $Y_n=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ выражаются в виде

$$y^r(n) = \bigvee_{i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_{n-r+1}} y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_{n-r+1}}, \quad r=1,\ldots,n. \tag{31}$$

Доказательство. В случае $r=1$ выражение (31) переходит в уже доказанную формулу (17), а в случае $r=n$ — в формулу (18). Рассмотрим промежуточные случаи $r=2, \ldots, n-1$. Применим индукцию по n (переход от множества Y_n к множеству $Y_{n+1}=(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$). Допустим, что формула (31) верна. Тогда, используя выражение (16, б), можно для произвольного порядкового элемента множества Y_{n+1} записать

$$y^r(n+1) = y^r(n)\,y_{n+1} \vee y^{r-1}(n) = \bigvee_{\substack{i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_{n-r+1}\\ i_k\neq n+1}} y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_{n-r+1}}y_{n+1} \vee$$

$$\vee\, y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_{n-r+2}} = \bigvee_{i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_{(n+1)-r+1}} y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_{(n+1)-r+1}}, \quad r=2,\ldots,n.$$

Таким образом формула (31) осталась верной при переходе от n к $n+1$, что и требовалось доказать.

Выражение (31) определяет записанный на языке бесконечнозначной логики алгоритм выделения произвольной порядковой ординаты y^r в множестве Y_n. Выясним, каков номер r порядковой ординаты y^r, отыскание которой целесообразно принять за такую базовую операцию, что ее повторение приводит к упорядочению множества Y_n. Очевидно, этот номер надо выбрать так, чтобы минимизировать сложность N_n^r отыскания ординаты y^r и объем памяти P_n^r, необходимый для хранения информации об отыскании y^r. Отыскание ординаты y^r по формуле (31) требует: 1) $n-r$ элементарных операций сравнения двух чисел при вычислении каждой $(n-r+1)$-местной конъюнкции, причем общее число конъюнкции составляет $C_n^{n-r+1}=C_n^{r-1}$; 2) $C_n^{r-1}-1$ элементарных операций при вычислении дизъюнкции. Отсюда, суммируя составляющие, находим

$$N_n^r = C_n^{r-1}(n-r+1)-1. \tag{32}$$

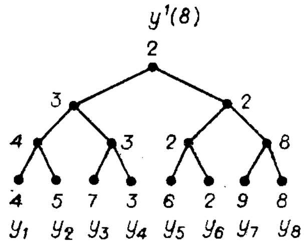

Рис. 2.

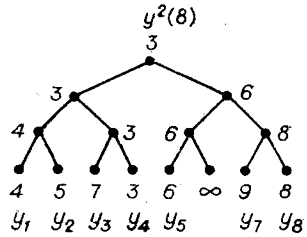

Рис. 3.

Для запоминания информации, получаемой при отыскании y^r, требуются: 1) четыре единицы памяти на каждую элементарную операцию сравнения при вычислении $(n-r+1)$-местных конъюнкций (две единицы — для номеров сравниваемых величин, одна — для результатов сравнения и одна — для его номера); 2) $2(n-r+1)+2$ единицы памяти на каждую элементарную операцию сравнения при вычислении дизъюнкции ($2(n-r+1)$ единицы — для номеров сравниваемых конъюнкций, одна — для результата сравнения и одна — для его номера). Отсюда находим

$$P_n^r = 4C_n^{r-1}(n-r) + (2n-2r+4)\left(C_n^{r-1}-1\right) = C_n^{r-1}(6n-6r+4) - \\ -2n+2r-4. \qquad (33)$$

Анализ выражений (32) и (33) как функций от r показывает, что они достигают минимума в крайних точках $r=1$ и $r=n$, причем

$$N_n^1 = N_n^n = n-1; \quad P_n^1 = P_n^n = 4(n-1). \qquad (34)$$

Таким образом, за базовую операцию, повторение которой приводит к упорядочению множества ординат Y_n, целесообразно принять отыскание максимальной y^n или минимальной y^1 ординаты. Мы примем последнее, что дает следующий алгоритм упорядочения.

Первый шаг — отыскание минимальной ординаты $y^1(n)$ в исходном множестве $Y_n=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — ведется по формуле, вытекающей из (31) при $r=1$:

$$y^1(n) = y_1y_2\ldots y_n = (\ldots\{[(y_1y_2)(y_3y_4)]\ldots\}\{[(y_{n-3}y_{n-2})\times \\ \times(y_{n-1}y_n)]\ldots\}\ldots),$$

чему соответствует схема алгоритма в виде дерева, пример которой для случая $n=8$ показан на рис. 2. Согласно (34), на первом шаге производится $n-1$ элементарная операция сравнения.

Второй шаг — отыскание минимальной ординаты $y^1(n-1)$ в множестве $Y_n \setminus y^1(n)$ — выполняется по запомненной схеме алгоритма первого шага (см. рис. 2). Так, минимальная ордината $y_i=y^1(n)$ (на рисунке это $y_6=2$) исключается из нижнего уровня дерева и заменяется на ∞. В полученном дереве осуществляют операции сравнения лишь в ветви, ведущей от ∞ к верхнему уровню (рис. 3), так как проведенная замена не отразилась на содержании остальных ветвей. В результате находится ордината $y^1(n-1)$ множества $Y_n \setminus y^1(n)$, совпадающая с ординатой $y^2(n)$ исходного множества Y_n (на рис. 3 это $y^2(8)=3$).

На третьем шаге из нижнего уровня дерева исключается (с заменой на ∞) ордината $y_i=y^2(n)$ (на рис. 3 это $y_4=3$), проводятся сравнения в получившейся ветви «∞ — верхний уровень», в результате чего находится ордината $y^3(n)$ множества Y_n.

Последующие шаги выполняются аналогично. Число сравнений, выполняемых на 2-м, 3-м, ..., n-м шагах алгоритма, равно высоте дерева, т. е. $\approx \log_2 n$. Таким образом, сложность упорядочения множества Y_n теперь составляет

$$N(n) = n - 1 + (n-1)\log_2 n \approx n \log_2 n. \tag{35}$$

8. Случай равных ординат функции. Допустим, что предположение о попарном неравенстве ординат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ исследуемой функции (см. п. 2) неверно, т. е. для некоторых i и j возможно $y_i = y_j$. Тогда вместо упорядочения множества ординат Y по отношению $<$ (формула (4)) следует, очевидно, упорядочивать это множество по отношению $\leqslant$, получая множество

$$Y' = \{y^1, y^2, \ldots, y^n\}, \text{ где } y^r \in Y \text{ и } y^1 \leqslant y^2 \leqslant \ldots \leqslant y^n. \tag{36}$$

Пусть имеется некоторый алгоритм упорядочения множества Y с неравными ординатами по отношению $<$. Элементарная операция сравнения в этом алгоритме (формулы (9), (10)) выделяет максимальную (минимальную) из двух ординат y_i и y_j. Ясно, что в случае $y_i = y_j$ такая операция выдает любую из ординат, но формально это по-прежнему является выделением максимальной (минимальной) из двух ординат.

Таким образом, рассматриваемый алгоритм работает и в случае равенства некоторых ординат, выполняя упорядочение множества ординат Y, но не по отношению $<$, а по отношению ($<$ или $=$), т. е. по отношению $\leqslant$, как и требуется согласно (36). Из изложенного следует, что принятое в п. 2 предположение о неравенстве ординат исследуемой функции не снижает общности рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гинзбург С. А.** Математическая непрерывная логика и изображение функций. М., «Энергия», 1968, с. 136.
2. **Левин В. И.** Введение в динамическую теорию конечных автоматов. Рига, «Зинатне», 1975, с. 376.

Поступила в редакцию 3 мая 1977 г.;
окончательный вариант — 11 мая 1978 г.