

В. Г. ГАЛАГАН

(Киев)

**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ
ЦИФРОВЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ**

При вычислении корреляционных функций случайных процессов цифровыми методами целесообразно применять алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), который позволяет значительно уменьшить количество арифметических операций по сравнению с методом непосредственного перемножения с накоплением.

Как известно [1], для получения оценок корреляционных функций с малыми статистическими погрешностями длительности реализаций анализируемых процессов должны в несколько сотен раз превышать интервал корреляции, что требует большого объема запоминающих устройств (ЗУ) при однократном применении БПФ к полной длительности реализаций. Для уменьшения объема ЗУ на практике применяется метод секционирования [2], который заключается в разбиении реализаций процессов на секции, вычислении оценок корреляционной функции от каждой секции отдельно (с многократным применением БПФ) и усреднении результатов. Метод секционирования можно описать соотношением

$$\tilde{K}_{xy}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1} \left\{ \sum_{k=iN_c}^{(i+1)N_c} x_i(kT) y_i([k+m]T) \right\}, \quad (1)$$

где $x_i(kT) = \Pi_i(kT)x(kT)$, $y_i(kT) = \Pi_i(kT)y(kT)$, $x(kT)$ и $y(kT)$ — последовательности отсчетов реализаций случайных процессов; функция $\Pi_i(kT) \equiv 1$ при $k \in (iN_c \div (i+1)N_c)$ и нулю при прочих k ; M — число секций; N_c — число отсчетов в секции; $N = MN_c$ — общее число отсчетов.

Применение секционирования, несмотря на экономию объема ЗУ, приводит к возрастанию статистической погрешности оценки корреляционной функции при больших значениях аргумента. Для устранения этого недостатка целесообразно использовать метод секционирования с перекрытием, предложенный в работе [3], который хотя и требует примерно в 1,5 раза большего числа операций и объема ЗУ, однако позволяет повысить точность оценки.

Для определения целесообразности и эффективности применения метода секционирования с перекрытием представляет интерес сравнить его статистические погрешности с классическим методом секционирования. Исходя из полученных в [3] выражений, описывающих метод секционирования с перекрытием для автокорреляции, легко получить более общее соотношение для взаимной корреляции:

$$\tilde{K}_{xy}^{in}(mT) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1} \left\{ \sum_{k=(i-1)N_c}^{(i+1)N_c} [x_{i-1}(kT) + x_i(kT)] y_i([k+m]T) \right\},$$

$$m \in (0 \div N_c - 1); \quad (2)$$

$$\tilde{K}_{xy}^n(mT) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1} \left\{ \sum_{k=(i-1)N_c}^{(i+1)N_c} [x_i(kT) + x_{i+1}(kT)] y_i([k+m]T) \right\},$$

$$m \in (-(N_c - 1) \div 0). \quad (3)$$

Вычисления по формулам (2) и (3) производятся совместно с учетом того, что $y_i(kT)$ входит в обе формулы, поэтому дискретное преобразование Фурье (ДПФ) этой секции вычисляется один раз и используется сначала в выражении (2), а затем в (3). Вследствие того что в соотношении (2) секция $y_i(kT)$ расположена в конце секций процесса $x(kT)$, а в (3) — в начале, то в ДПФ секции $y_i(kT)$ в последнем случае необходимо вводить фазовый множитель, который будет равен 1 при четных отсчетах ДПФ и -1 — при нечетных.

Легко показать, что если $|m| < N_c$, то

$$\tilde{K}_{xy}^n(mT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) y[(k+m)T], \quad (4)$$

т. е. оценка по методу секционирования с перекрытием тождественна непосредственной оценке по полной длительности реализации.

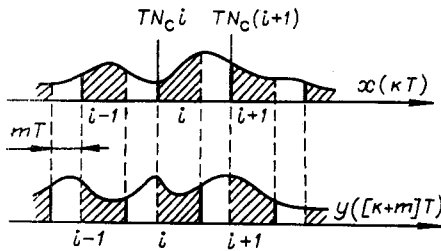


Рис. 1. К оценке дисперсии оценки корреляционной функции по методу секционирования.

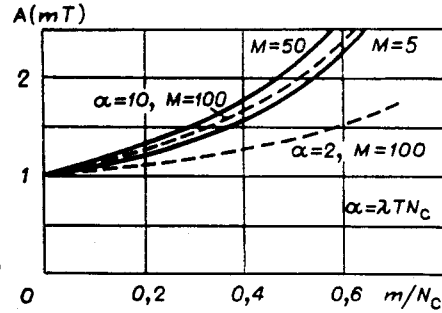


Рис. 2. Зависимости отношения дисперсий погрешностей для методов секционирования и секционирования с перекрытием от аргумента корреляционной функции.

Для определения статистических погрешностей вычисления корреляционной функции будем исходить из известного [4] выражения для дисперсии погрешности оценки корреляционной функции стационарного гауссового процесса

$$D[\tilde{K}_{xy}(\tau)] = \frac{1}{L-|\tau|} \int_{-(L-|\tau|)}^{L-|\tau|} \left[1 - \frac{|\xi|}{L-|\tau|}\right] \gamma(\xi, \tau) d\xi, \quad (5)$$

где L — длительность реализации, $\gamma(\xi, \tau) = K_{xx}(\xi)K_{yy}(\xi) + K_{xy}(\xi + \tau)K_{yx}(\xi - \tau)$. Хотя соотношение (5) получено для интегральной оценки, но его можно применять для дискретного алгоритма, основываясь на том [1], что оценка по формуле (5) незначительно отличается от истинной погрешности, если временные отсчеты взяты с периодом, меньшим интервала корреляции. Последнее практически всегда выполняется.

Таким образом, для метода секционирования с перекрытием дисперсию погрешности, исходя из (4) и (5), можно записать в виде

$$D[\tilde{K}_{xy}^n(mT)] = \frac{1}{(N-|m|)T} \int_{-(N-|m|)T}^{(N-|m|)T} \left[1 - \frac{|\xi|}{(N-|m|)T}\right] \gamma(\xi, mT) d\xi. \quad (6)$$

Для получения дисперсии погрешности метода секционирования можно применить общий подход [4], однако выражения, получаемые при этом, оказываются громоздкими и труднообозримыми, поэтому применим упрощенный метод. На рис. 1, исходя из выражения (1), условно (штриховкой) показано расположение участков реализаций процессов, где производится перемножение с накоплением для метода секционирования при некотором значении mT . Если расположить заштрихованные участки друг за другом, т. е. сомкнуть их, и считать полученную сумму одной реализацией общей длиной $M(N_c - |m|)T$, то для оценки дисперсии можно применить выражение (5), которое для этого случая примет вид

$$D[\tilde{K}_{xy}(mT)] = \frac{1}{M(N_c - |m|)T} \int_{-M(N_c - |m|)T}^{M(N_c - |m|)T} \left[1 - \frac{|\xi|}{M(N_c - |m|)T}\right] \gamma(\xi, mT) d\xi. \quad (7)$$

При $m=0$ выражения (6) и (7) совпадают, а при $m \neq 0$ оценка (7) несколько завышена, так как сомкнутые отрезки более коррелированы, чем раздвинутые на интервал mT . Последним можно пренебречь, если длительность корреляционной функции меньше длительности секции.

Составим отношение дисперсий (6) и (7):

$$A(mT) = D[\tilde{K}_{xy}(mT)] / D[\tilde{K}_{xy}^n(mT)], \quad (8)$$

которое характеризует выигрыш в уменьшение погрешности, получаемый при применении метода секционирования с перекрытием. Предполагая, что длительность корреляционных функций значительно меньше общей длины реализации, нетрудно убедиться, что

$$\int_{-(N-|m|)T}^{(N-|m|)T} \left[1 - \frac{|\xi|}{(N-|m|)T} \right] \gamma(\xi, mT) d\xi \approx \int_{-M(N_c-|m|)T}^{M(N_c-|m|)T} \left[1 - \frac{|\xi|}{M(N_c-|m|)T} \right] \times \\ \times \gamma(\xi, mT) d\xi,$$

если $|m| < N_c/2$. При этом выражение (8) примет простой вид:

$$A(mT) = (N - |m|) / M(N_c - |m|). \quad (9)$$

График функции $A(mT)$ для различных значений M представлен на рис. 2 сплошными линиями. Как следует из графиков, для значений m , близких к $N_c/2$, дисперсия погрешности для метода секционирования с перекрытием примерно вдвое меньше. Для проверки справедливости оценки (9) были проведены расчеты по точным формулам для случая корреляционной функции вида $K_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\lambda|\tau|)$. Результаты представлены на рис. 2 штриховыми линиями. Сравнение кривых показывает, что оценка (9) практически приемлема. Кривая для значения $\lambda TN_c = 2$ свидетельствует об уменьшении выигрыша при увеличении длительности корреляционной функции.

Таким образом, метод секционирования с перекрытием для вычисления корреляционных функций по алгоритму БПФ позволяет почти вдвое уменьшить дисперсию случайной погрешности по сравнению с классическим методом секционирования, хотя и требует некоторого увеличения числа арифметических операций и объема ЗУ.

Этот метод целесообразно применять для анализа низкочастотных процессов, когда увеличение количества операций не имеет существенного значения и вычислительное устройство в состоянии обеспечить работу в реальном масштабе времени. Его можно применять также для оценки спектральной плотности случайных процессов. При этом, как показывает анализ, оценки для процессов, близких к белому шуму, имеют примерно в 1,5 раза меньшую дисперсию случайной погрешности при той же ширине полосы по сравнению с методом секционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. Н., Лившиц Н. А. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Сов. радио», 1973.
2. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М., «Сов. радио», 1973.
3. Rader M. An improved algorithm for high speed autocorrelation with applications to spectral estimation.— "IEEE Trans. on AV-18", 1970, N 4, p. 439—441.
4. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М., «Мир», 1972.

Поступило в редакцию 13 октября 1976 г.;
окончательный вариант — 25 июля 1977 г.

УДК 621.383 : 535

Г. К. ГРИГОРЬЕВ, Б. Г. ПОДЛАСКИН
(Ленинград)

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ФОТОПРИЕМНЫХ МАТРИЦ В РЕЖИМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АДАМАРА

В настоящее время большое внимание уделяется преобразованию Адамара как средству кодирования сигнала, удобному для сокращения избыточности информации, опознавания образов, фильтрации и проведения других логических операций [1]. Имеются также предложения по реализации этого преобразования непосредственно на входе оптоэлектронных систем [2].

При реализации интегральных преобразований на уровне входных слоев информационных устройств необходимо учитывать собственные шумы фотоприемников, разброс их параметров, перекрестные и коммутационные помехи, определяющие пороговую чувствительность систем в целом.