АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1979

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

УДК 535.4 : 517.53

М. Л. АГРАНОВСКИЙ

(*Новосибирск*)

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫХ СИГНАЛОВ

Задача синтеза киноформов может быть сформулирована как задача наилучшей аппроксимации заданной функции (сигнала, изображения) модулями функций (интенсивностями сигналов), имеющих фиксированный модуль преобразования Фурье (фиксированную частотно-амплитудную характеристику). Попытки точного решения с использованием обычных метрик в пространствах функций (равномерной или интегральных метрик) наталкиваются на значительные трудности как аналитического, так и принципиального характера.

В настоящей работе предлагается подход к некоторым вариантам задачи синтеза киноформов, основанный на применении методов теории функций комплексного переменного. Как показано ниже, в рамках указанного подхода появляется возможность получения точного математически обоснованного решения.

Постановка задачи. *Одномерный случай.* Пусть $f(x)$ — положительная функция, заданная на интервале $0 \leqslant x \leqslant A$, $p = (p_0, \ldots, p_N)$ — вектор с положительными координатами. Требуется найти вектор фаз $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_N)$, для которого функция

$$I(\theta, x) = \left| \sum_{n=0}^{N} p_n e^{i\theta_n} e^{\frac{2\pi i x}{A} n} \right|^2$$

наиболее близка к $f(x)$.

Двумерный случай. Даны положительная функция $f(x, y)$ в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant A$, $0 \leqslant y \leqslant B$ и матрица $P = (p_{n,m})_{n,m=1}^{N,M}$ с положительными элементами (матрица амплитуд). Требуется указать матрицу $\Theta = (\theta_{n,m})_{n,m=1}^{N,M}$ (фазовую матрицу), для которой интенсивность

$$I(\Theta, x, y) = \left| \sum_{n,m=0}^{N,M} p_{n,m} e^{i\theta_{n,m}} e^{2\pi i \left(n\frac{x}{A} + m\frac{y}{B} \right)} \right|^2$$

наиболее близка к $f(x, y)$.

Важным является случай, когда данные амплитуды Фурье p_n и $p_{n,m}$ постоянны и равны, например, единице.

В настоящей работе рассматривается частный случай поставленных задач, когда исходная функция (восстанавливаемое изображение) постоянна. Следует сразу отметить, что использование критерия среднеквадратического уклонения приводит к задаче минимизации функции

$$p(\theta_{n,m}) = \frac{1}{AB}\int_0^A\int_0^B |f(x, y) - I(\Theta, x, y)|^2\,dxdy$$

от nm переменных, аналитическое решение которой представляется затруднительным.

Выбор критерия. Используем для выбора критерия близости функции интенсивности к постоянной следующее соображение. Хорошо известно неравенство Иенсена, связывающее среднегеометрическое $G(h)$ положительной функции h и ее среднеарифметическое $S(h)$:

$$G(h) = \exp\left(\frac{1}{A}\int_0^A \ln h(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{A}\int_0^A h(x)\,dx = S(h).$$

При этом равенство возможно лишь в случае $h = \text{const}$.

Обозначим через $\Phi_N(p)$ класс функций $f(x)$, имеющих конечный ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} p_n e^{i\theta_n} e^{\frac{2\pi i x}{A} n},$$

где $p = (p_0, \ldots, p_N)$ — заданный вектор с положительными координатами. Введем функцию интенсивности $I_f(x) = |f(x)|^2$. Ее среднеарифметическое равно $S(I_f) = \sum_{n=0}^{N} p_n^2 = E$ и, следовательно, одинаково для всех $f \in \Phi_N(p)$. Обозначим $\sigma_f = G(I_f)$. В силу неравенства Иенсена $\sigma_f \leqslant E$ и равенство $\sigma_f = E$ возможно лишь в случае $I_f = \text{const} = E$. Учитывая это, примем за меру близости I_f к постоянной меру близости σ_f к своему наибольшему возможному значению E. Мы опустим более пространные доводы в пользу оправданности такого критерия.

Таким образом, приходим к следующей задаче. В одномерном случае — найти фазовый вектор $\theta^0 = (\theta_0^0, \ldots, \theta_N^0)$ такой, что функция

$$f^0(x) = \sum_{n=0}^{N} p_n e^{i\theta_n^0} e^{\frac{2\pi i x}{A} n}$$

доставляет максимум функционалу σ_f на множестве функций $f \in \Phi_N(p)$.

Обозначим через $\Phi_{N,M}(P)$ класс функций $F(x, y)$ в области $0 \leqslant x \leqslant A$, $0 \leqslant y \leqslant B$, имеющих ряд Фурье:

$$F(x, y) = \sum_{n,m=0}^{N,M} p_{n,m} e^{i\theta_{n,m}} e^{2\pi i\left(n\frac{x}{A} + m\frac{y}{B}\right)},$$

где $P = (p_{n,m})_{n,m=1}^{N,M}$ — фиксированная матрица с положительными элементами. Как и в одномерном случае, желая приблизить интенсивность $I_F(x, y) = |F(x, y)|^2$ к константе, будем максимизировать среднегеометрическую интенсивность

$$\sigma_F = \exp\left(\frac{1}{AB}\int_0^A\int_0^B \ln|F(x, y)|^2\,dxdy\right)$$

в классе функций $F \in \Phi_{N,M}(P)$.

Вопрос согласованности критерия, основанного на максимизации σ_F с критерием среднеквадратического уклонения, будет обсужден ниже.

Редукция задачи и выбор оптимальных фаз. *Одномерный случай.* Пусть $f \in \Phi_N(p)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} p_n e^{i\theta_n} e^{\frac{2\pi i x}{A} n}.$$

Положим $z = e^{2\pi i x/A}$. Тогда функции f можно сопоставить полином $f(z) = \sum_{n=0}^{N} p_n e^{i\theta_n} z^n$ от комплексной переменной z. Обозначим через $z_1, \ldots, z_N$ корни полинома $f(z)$. Пусть D_1 — открытый единичный круг в комплексной плоскости с центром в нуле. Назовем корни, лежащие в области D_1, внутренними, остальные корни — внешними. Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — внутренние корни. Составим произведение Бляшке:

$$B(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}.$$

Полином

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z)}{B(z)} = p_N e^{i\theta_N} (z - z_{k+1}) \ldots (z - z_N) (1 - \bar{z}_1 z) \ldots (1 - \bar{z}_k z)$$

имеет на единичной окружности тот же модуль, что и $f(z)$. Поскольку $\tilde{f}(z)$ не обращается в нуль в круге D_1, функция $\ln|\tilde{f}(z)| = \operatorname{Re} \ln \tilde{f}(z)$ гармонична в D_1 и по теореме о среднем для гармонических функций получаем

$$\sigma_f = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|\tilde{f}(e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi\right) = p_N^2 |z_{k+1} \ldots z_N|^2. \qquad (1)$$

Таким образом, задача максимизации σ_f сводится к задаче отыскания функции из класса $\Phi_N(p)$ с максимальным произведением модулей внешних корней.

Будем обозначать через Φ_N, $\Phi_{N,M}$ классы $\Phi_N(p)$, $\Phi_{N,M}(P)$ соответственно в случае $p_n = 1$, $p_{n,m} = 1$.

Предложение 1. *Фазовый вектор $\theta^0 = (0, \ldots, 0, \pi)$ доставляет локальный (а в случае $N \leqslant 3$ — абсолютный) максимум функционалу σ_f в классе функций $f \in \Phi_N$.*

Доказательства этого и нижеследующих утверждений вынесены в приложение.

Предложение 2. *Если амплитуды $p_0, \ldots, p_N$ связаны неравенством*

$$p_{N-1} > p_0 + \ldots + p_{N-2} + p_N,$$

то фазовый вектор $\theta^0 = (0, \ldots, 0, \pi)$ доставляет абсолютный максимум функционалу σ_f в классе функций $f \in \Phi_N(p)$.

Двумерный случай. Как и в одномерном случае, задача максимизации σ_F в классе $\Phi_{N,M}(P)$ сводится к соответствующей экстремальной задаче для полиномов двух комплексных переменных.

Предложение 3. *Рассмотрим фазовую матрицу*

$$\Theta^0 = (\theta^0_{n,m})_{n,m=1}^{N,M}, \quad \theta^0_{n,m} = \theta^0_n + \theta^0_m,$$

где $\theta^0 = (\theta^0_0, \ldots, \theta^0_N)$ — фазовый вектор, определенный в предложении 1. Функция $F^0 \in \Phi_{N,M}$, отвечающая фазовой матрице Θ^0, доставляет *локальный (а в случае N, $M \leqslant 3$ абсолютный) максимум функционалу σ_F в классе функций $F \in \Phi_{N,M}$.*

Если $p_{n,m} = p'_n p''_m$, причем $p'_{N-1} > p'_0 + \ldots + p'_{N-2} + p'_N$, $p''_{M-1} > p''_0 + \ldots + p''_{M-2} + p''_M$, то функция F^0, построенная по матрице Θ^0, доставляет абсолютный максимум σ_F, $F \in \Phi_{N,M}(P)$.

Перейдем к фазовой решетке, квантованной по величине $\pi/2$. Для этого сделаем сдвиг переменных $x \to A/4 + x$, $y \to B/4 + y$ (предварительно продолжим F^0 периодически на всю плоскость), при котором, очевидно, значение σ_{F^0} не изменится. Полученная фазовая матрица показана в таблице. Следует отметить схожесть этой матрицы со случайной фазовой маской, приведенной в работе [1]. Степень закономерности этого обстоятельства пока не ясна, и выяснение ее, по-видимому, заслуживает интереса.

0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π
0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π

Оценки величины σ_j. Для некоторых функций рассматриваемых классов можно привести несложные оценки величины σ_f.

Предложение 4. *Пусть*

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{i\theta_n^{(k)}} e^{\frac{2\pi i x}{A} n},$$

где $\theta_0^{(k)} = \ldots = \theta_k^{(k)} = 0$, $\theta_{k+1}^{(k)} = \ldots = \theta_N^{(k)} = \pi$. *Справедливы неравенства:*

$$\frac{4}{(N+1)^2}[\max(k, N-k)+1]^2 \leqslant \sigma_{f_k} \leqslant 9.$$

В двумерном случае рассмотрим функции $F_{k,l}$, представимые в виде $F_{k,l}(x, y) = f_k(x) f_l(y)$. Соответствующая фазовая матрица такова: $\theta_{n,m}^{(k,l)} = 0$, если $0 \leqslant n \leqslant k$, $0 \leqslant m \leqslant l$ или $k < n \leqslant N$, $l < m \leqslant M$; $\theta_{n,m}^{(k,l)} = \pi$, если $0 \leqslant n \leqslant k$, $l < m \leqslant M$ или $k < n \leqslant N$, $0 \leqslant m \leqslant l$.

Учитывая соотношение $\sigma_{F_{k,l}} = \sigma_{f_k} \sigma_{f_l}$, из предложения 4 получаем

Предложение 5. *Выполнены неравенства*

$$\frac{16}{(N+1)^2(M+1)^2}[\max(k, N-k)+1]^2[\max(l, M-l)+1]^2 \leqslant \sigma_{F_{k,l}} \leqslant 81.$$

Обсуждение результатов. Попытаемся интерпретировать полученные результаты на менее формальном уровне. Для простоты обсудим одномерный случай. Оптимальные фазы отыскивались исходя из критерия близости среднегеометрической интенсивности к значению энергии, общему для всех сигналов (изображений) с одинаковой частотно-амплитудной характеристикой. Сближение среднегеометрического и среднеарифметического влечет приближение функций к своему среднему значению в смысле сходимости по мере, т. е. при каждом фиксированном значении порога c суммарная длина интервалов, на которых значения функций превышают c, с ростом среднегеометрического становится малой. Другими словами, допускаются большие выбросы значений на малых участках. Это может означать уменьшение амплитуд низкочастотных составляющих функции интенсивности. С этой точки зрения конструкцию фазового вектора $\theta^0=(0, \ldots, 0, \pi)$, доставляющего максимум функционалу, можно попытаться объяснить тем, что поворот фазы на π в высшей гармонике вызывает компенсацию некоторых низкочастотных составляющих в ряде Фурье функции интенсивности. Продемонстрируем это на примере $N=2: f^0(x)=1+e^{2\pi ix/A}-e^{4\pi ix/A}$, функция **интенсивности** $I_{f^0}(x)=|f^0(x)|^2=3-2\cos\left(\frac{4\pi x}{A}\right)$, т. е. отсутствуют гармоники первого порядка, которые присутствуют в ряде Фурье для функции I_f при выборе, например, постоянного фазового вектора.

Сравним среднеквадратические уклонения интенсивностей при выборе фазового вектора θ^0 и постоянного фазового вектора $\xi=(\xi_0, \ldots, \xi_0)$. Будем рассматривать случай $p_0=\ldots=p_N=1$. Функция $c(x)$, построенная по постоянной фазе, имеет ряд Фурье

$$c(x)=e^{i\xi_0}\sum_{n=0}^{N} e^{\frac{2\pi ix}{A}n}.$$

Функция интенсивности

$$I_c(x)=|c(x)|^2=N+1+2\sum_{n=1}^{N}(N-n+1)\cos\left(n\frac{2\pi x}{A}\right).$$

Функция интенсивности для фазового вектора θ^0

$$I_{f^0}(x)=|f^0(x)|^2=N+1+2\sum_{n=1}^{N}|N-n-1|\cos\left(n\frac{2\pi x}{A}\right).$$

Расстояния в среднеквадратическом ρ_c, ρ_{f^0} функций I_c, I_{f^0} от своего среднего значения $E=N+1$ равны:

$$\rho_c=\left[2\sum_{n=1}^{N}(N-n+1)^2\right]^{1/2}=\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}\right]^{1/2};$$

$$\rho_{f^0}=\left[2\sum_{n=1}^{N}(N-n-1)^2\right]^{1/2}=\left[\frac{(N-2)(N-1)(2N-3)}{3}+1\right]^{1/2}.$$

Нетрудно подсчитать, что $\rho_c^2=\rho_{f^0}^2+4N(N-1)$. Величина $4N(N-1)$ выражает выигрыш в погрешности при аппроксимации константы с использованием вектора фаз θ^0 по сравнению с постоянным фазовым вектором. Более того, нетрудно видеть, что постоянная фаза является наихудшей для восстановления константы в среднеквадратическом приближении. Действительно, для любой $f\in\Phi_N$ квадрат уклонения I_f от среднего значения $E=N+1$

$$\rho^2{}_f=\frac{1}{A}\int_0^A(E-|f(x)|^2)^2dx=2\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{k=n}^{N}e^{i(\theta_k-\theta_{k-n})}\right|^2.$$

Последняя величина не превосходит $2\sum_{n=1}^{N}(N-n+1)^2=\rho_c^2$, т. е. $\rho_f\leqslant\rho_c$. Этот факт легко согласуется и с принятым нами критерием максимума σ_f. В самом деле, постоянной фазе отвечает полином $c(z)=1+z+\ldots+z^N$, все корни которого лежат на единичной окружности. Следовательно, в силу (1) σ_c принимает наименьшее возможное в классе Φ_N значение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 1. Пусть $f^0(x)=\sum_{n=0}^{N}e^{i\theta_n^0}e^{\frac{2\pi ix}{A}n}$. Рассмотрим соответствующий полином $f^0(z)=1+z+\ldots+z^{N-1}-z^N$, $z=e^{2\pi ix/A}$. Просуммировав первые N слагаемых, получим при $z\neq 1$

$$f^0(z)=(z^N-1/z-1)-z^N=z^{N+1}-2z^N+1/1-z.$$

Так как при $N>1$ $f^0(1)\neq 0$, корни полинома $f^0(z)$ совпадают с отличными от единицы корнями полинома $z^{N+1}-2z^N+1$. Положим $|z|=r$. Если $1<r<r_0$ и r_0 достаточно близко к единице, то выполнено неравенство $r^{N+1}+1<2r^N$. Отсюда $|z^{N+1}+1|\leqslant|z|^{N+1}+1\leqslant 2|z|^N$ при $1<|z|<r_0$. Из полученного неравенства по теореме Руше (см., например, [2]) вытекает, что полином $z^{N+1}-2z^N+1$ имеет в круге $D_r=\{z:|z|<r\}$ столько же нулей (с учетом кратностей, сколько и полином z^N, т. е. в точности N корней. Отбрасывая корень $z=1$, получаем, что количество корней полинома $f^0(z)$ в любом круге D_r, $1<r<r_0$, равно $N-1$. Следовательно, $f^0(z)$ имеет единственный внешний корень, который обозначим через z_0. Уравнение $z^{N+1}-2z^N+1=0$ эквивалентно уравнению $z+z^{-N}=2$, имеющему единственный вещественный корень, больший единицы. Этот корень обязан совпадать с z_0, значит, $z_0>0$.

Согласно формуле (1), $\sigma_{f^0}=z_0^2$. Если полином $f(z)$, отвечающий произвольной функции из Φ_N, имеет коэффициенты, достаточно близкие к коэффициентам $f^0(z)$, то $f(z)$ также имеет единственный внешний корень. Осталось показать, что z_0 является наиболее удаленным от нуля корнем среди корней всех полиномов $f\in\Phi_N(p)$. Доказательство этого факта можно найти, например, в работе [3]. Приведем его здесь для полноты изложения,

Пусть $f\in\Phi_N(p)$ и $w\neq 0$ — корень $f(z)$. Введем функцию

$$\gamma(x)=p_0x^{-N}+p_1x^{1-N}+\ldots+p_{N-1}x^{-1},\ x>0.$$

Из равенства

$$0=f(w)\,w^{-N}=p_0e^{i\theta_0}w^{-N}+\ldots+p_{N-1}e^{i\theta_{N-1}}w^{-1}+p_Ne^{i\theta_N}$$

вытекает неравенство

$$p_N\leqslant p_0|w|^{-N}+\ldots+p_{N-1}|w|^{-1},$$

т. е. $\gamma(|w|)\geqslant p_N$. С другой стороны, $p_Nz_0^N-p_{N-1}z_0^{N-1}-\ldots-z_0^N-1=-f^0(z_0)=0$, и, разделив обе части равенства на z_0^N, получаем $\gamma(z_0)=p_N$. Так как $\gamma(x)$ монотонно убывает при $x>0$, то из $\gamma(|w|)\geqslant\gamma(z_0)$ вытекает $|w|\leqslant z_0$.

Если $N\leqslant 3$, то количество внешних корней равно единице либо двум, так как произведение всех трех корней равно по модулю единице. Если внешний корень единствен, то $\sigma_f\leqslant z_0^2=\sigma_{f^0}$. Если внешних корней два, рассмотрим полином $f^*(z)=z^N f(1/z)$. Тогда $f^*\in\Phi_N$ и $f^*(z)$ имеет один внешний корень. Кроме того, $\sigma_f=\sigma_{f^*}$. Следовательно, $\sigma_f=\sigma_{f^*}\leqslant\leqslant z_0^2=\sigma_{f^0}$. Итак, если $N\leqslant 3$, то $\sigma_{f^0}=\max\limits_{f\in\Phi_N}\sigma_f$.

Доказательство предложения 2. Если $p_{N-1}>p_0+\ldots+p_{N-2}+p_N$, то по одной локализационной теореме Пароди [4] полином $f(z)=p_0e^{i\theta_0}+\ldots+p_Ne^{i\theta_N}z^N$ обладает единственным внешним корнем. Из предыдущего доказательства и выражения (1) получаем

$$\sigma_f\leqslant z_0^2=\sigma_{f^0}.$$

Доказательство предложения 3. Положим

$$F^0(z_1,z_2)=\sum_{n,m=1}^{N,M}e^{i\theta^0_{n,m}}z_1^n z_2^m.$$

В силу выбора фаз $\theta^0_{n,m}$ полином $F^0(z_1, z_2)$ представляется в виде произведения

$$F^0(z_1, z_2)=q_1(z_1)q_2(z_2),$$

где $q_1(z_1)=1+z_1+\ldots+z_1^{N-1}-z_1^N$, $q_2(z_2)=1+z_2+\ldots+z_2^{M-1}-z_2^M$.

Пусть $F\in\Phi_{N,M}$ — произвольная функция. Если коэффициенты соответствующего полинома $F(z_1, z_2)$ достаточно близки к коэффициентам $e^{i\theta^0_{n,m}}$ полинома $F^0(z_1, z_2)$, то при каждом фиксированном z_2, $|z_2|\leqslant 1$, полином $F(\cdot, z_2)$ от переменной z_1 имеет, как и $q_1(z_1)$ (см. доказательство предложения 1), единственный внешний корень $\alpha(z_2)$. По формуле (1)

$$\sigma_F=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|\alpha(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi\right).$$

Функция $\alpha(z_2)$ является аналитической функцией от переменной в круге $D_1=\{z_2: |z_2|\leqslant 1\}$. Согласно формуле Пуассона — Иенсена [2],

$$\sigma_F=|\alpha(0)|^2/|\beta|^2,$$

где β — произведение нулей функции $\alpha(z_2)$, лежащих в круге D_1. Пусть $z_2=w$ — нуль функции $\alpha(z_2)$, т. е. $\alpha(w)=0$. Это равносильно равенству $F(0, w)=0$, значит, w — корень полинома $F(0, \cdot)$. Таким образом, β совпадает с произведением внутренних корней полинома $F(0, \cdot)$ и из (1) $1/|\beta|^2=\sigma_{F(0,\cdot)}$. Так как $\alpha(0)$ — единственный внешний корень полинома $F(\cdot, 0)$, то $|\alpha(0)|^2=\sigma_{F(\cdot,0)}$. Выбрав коэффициенты $F(0, \cdot)$ настолько близкими к коэффициентам полинома $F^0(0, \cdot)=q_2$, чтобы $F(0, \cdot)$ имел единственный внешний корень, и учитывая, что $F(0, \cdot)\in\Phi_N$, $F(\cdot, 0)\in\Phi_M$, в силу предложения 1 получим неравенство

$$\sigma_F=\sigma_{F(0,\cdot)}\sigma_{F(\cdot,0)}\leqslant\sigma_{q_1}\sigma_{q_2}=\sigma_{F^0}.$$

Остальные утверждения вытекают из соответствующих фактов, доказанных для одномерного случая в предложениях 1, 2.

Доказательство предложения 4. Рассмотрим соответствующий фазовому вектору $\theta^{(k)}=(\theta_0^{(k)},\ldots,\theta_N^{(k)})$ полином

$$f_k(z)=1+z+\ldots+z^k-z^{k+1}-\ldots-z^N.$$

Для получения требуемых неравенств достаточно рассмотреть случай $k\geqslant N/2$, поскольку случай $k\leqslant N/2$ сводится к нему с помощью перехода к полиному $f_{N-k}(z)=-z^N f_k(1/z)$. Если N четно и $k=N/2$, то все корни $f_k(z)$ равны по модулю единице и $\sigma_{f_k}=1$. По той же причине $\sigma_{f_N}=1$. Будем предполагать, что $N/2<k<N$. При $z\neq 1$ имеем

$$f_k(z)=(z^{N+1}-2z^{k+1}+1)/1-z.$$

Так как функция $2r^{k+1}-r^{N+1}-1$ равна 0 в точке $r=1$ и строго монотонно возрастает на интервале $[1, r_0]$, где $r_0=(2k+2/N+1)^{1/N-k}$, то при $1<|z|<r_0$ выполнено неравенство

$$|1+z^{N+1}|\leqslant 2|z^{k+1}|.$$

По теореме Руше полином $z^{N+1}-2z^{k+1}+1$ имеет в любом круге D_r радиуса $r\in(1, r_0)$ с центром в нуле в точности $k+1$ корень. Так как $z=1$ не есть корень f_k, то количество внешних корней полинома f_k равно $N-k$ и все внешние корни удалены от нуля на расстояние, не меньшее r_0. Отсюда, согласно (1), получаем оценку снизу:

$$\sigma_{f_k}\geqslant(r_0^{N-k})^2=4\left(\frac{k+1}{N+1}\right)^2.$$

Перейдем к оценке σ_{f_k} сверху. Пусть $|z|>3^{1/N-k}$. Тогда

$$2|z^{k+1}|\leqslant|z|^{N+1}-|z|^{k+1}\leqslant|z^{N+1}|-1.$$

Отсюда $2|z^{k+1}|<|1+z^{N+1}|$. Из этого неравенства по теореме Руше вытекает, что количество корней полинома f_k, лежащих в круге $D_{3^{1/N-k}}$ радиуса $3^{1/N-k}$, совпадает с количеством корней в этом круге полинома $z^{N+1}+1$, т. е. равно $N+1$. Отбрасывая лишний корень $z=1$, получаем, что в круге $D_{3^{1/N-k}}$ лежат все N корней полинома f_k. Поскольку, как доказано выше, f_k имеет $N-k$ внешних корней, неравенство $\sigma_{f_k}\leqslant 9$ следует теперь непосредственно из (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Loka Akio, Kurashi K.** Holographic image formation using phase plates with incoherent imaging property.— "Appl. Opt.", 1976, vol. 15, p. 1787—1794.
2. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. М., Физматгиз, 1950.
3. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Ч. I. М., «Наука», 1978.
4. **Parodi M.** Sur la localisation des zeros des polynomes.— "Comp. Rend. Acad. Sci.", 1956, vol. 243, N 16, p. 1093—1099.

Поступила в редакцию 12 мая 1977 г.;
окончательный вариант — 5 мая 1978 г.

УДК 621.396.535.8

А. А. ВАСИЛЬЕВ, И. Н. КОМПАНЕЦ, С. П. КОТОВА, В. Н. МОРОЗОВ

(Москва)

УПРАВЛЯЕМЫЕ ТРАНСПАРАНТЫ В ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ СХЕМАХ С КОДИРОВАННЫМ ОПОРНЫМ ПУЧКОМ

Введение. Кодирование информации в оптоэлектронных вычислительных устройствах представляет важнейшую проблему, поскольку выбор оптимальных методов и схем кодирования позволяет решить много-