АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 6 1978

МЕТОДЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 621.317.080

Ш.-С. О. АБДУЛАЕВ, Б. А. БЕСЕДИН, Р. Ф. ИДРИСОВ
(*Новосибирск*)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ ДВУХ ТИПОВ

Введение. Измерительные средства типа радиотехнических и оптических станций — наиболее распространенные средства, по результатам измерений которых определяются статистические оценки траекторий летательных аппаратов. Оценки могут строиться по измерениям одного средства или чаще комплекса приборов. Одним из методов повышения точности оценок траектории является оптимальное размещение комплекса средств на некоторой территории в пределах полной или частичной «видимости» траектории летательного аппарата.

Желательно иметь в распоряжении систематический метод определения оптимального в некотором смысле размещения измерительных приборов на заданной территории с тем, чтобы в достаточно широких условиях автоматизировать процесс проектирования измерительных комплексов. Этот вопрос в целом обсуждался в работе [1].

Особенность измерительных приборов названного типа — нелинейность их уравнений относительно текущих координат наблюдаемой траектории и координат их местоположения. Единообразие методики автоматизации проектирования достигается ниже путем линеаризации уравнений приборов в окрестности номинальной траектории с последующим применением наилучшей линейной статистической оценки [2]. Предположение, что номинальная траектория известна, практически оправданно, по крайней мере, при экспериментальной отработке летательного аппарата или программном управлении его движением.

Исходные условия. Пусть $\bar{x}(t)$ есть известная (номинальная) траектория, $x(t)$ — наблюдаемая траектория. Обе траектории принадлежат одному и тому же параметрическому классу и определены следующим образом:

$$x(t) = F^{+}(t)\,\theta, \quad \bar{x}(t) = x(t)\,|_{\theta=\bar{\theta}}, \tag{1}$$

где $+$ — знак транспонирования, вектор-столбец $\theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \ldots, \theta_{1m_1}, \theta_{21}, \ldots, \theta_{2m_2}, \theta_{31}, \ldots, \theta_{3m_3})$, значение вектора $\bar{\theta}$ известно, значение θ неизвестно, t — переменная времени, матрица $F^{+}(t)$ имеет размерность $3\times(m_1+m_2+m_3)$ и вид

$$F^{+}(t) = \begin{bmatrix} f_1^{+}(t) & 0 & 0 \\ 0 & f_2^{+}(t) & 0 \\ 0 & 0 & f_3^{+}(t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где для любого $i=\overline{1,3}$ вектор-строка $f_i^{+}(t) = (1, t, t^2, \ldots, t^{m_i})$.

Траектория $x(t)$ наблюдается в дискретные моменты времени $t=\overline{1, T}$ измерительными приборами двух типов, различающихся математическим описанием. Станция первого типа описывается уравнениями:

$$
\begin{aligned}
y_{11}(t) &= \operatorname{arctg}\frac{x_2(t)-z_2}{x_1(t)-z_1} + \eta_{11}(t);\\
y_{12}(t) &= \operatorname{arctg}\frac{x_3(t)-z_3}{\|x(t)-z\|_{12}} + \eta_{12}(t),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))=x^+(t)$, $(z_1, z_2, z_3)=z^+$, причем z_i есть координаты местоположения станции первого типа, $\|x(t)-z\|_{12}=[(x_1(t)-z_1)^2+$ $+(x_2(t)-z_2)^2]^{1/2}$; наконец, $\eta_{11}(t)$, $\eta_{12}(t)$ — статистические ошибки измерения, так что $y_{11}(t)$ и $y_{12}(t)$ являются соответственно значениями азимута и угла места точки $x(t)$ относительно точки z, измеренными с ошибками.

Измерительное средство второго типа описывается уравнениями:

$$
\begin{aligned}
y_{21}(t) &= \operatorname{arctg}\frac{x_2(t)-z_2}{x_1(t)-z_1} + \eta_{21}(t);\\
y_{22}(t) &= \operatorname{arctg}\frac{x_2(t)-z_2}{x_1(t)-z_1} + \eta_{22}(t);\\
y_{23}(t) &= \|x(t)-z\|+\eta_{23}(t).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь два первых уравнения совпадают по форме с уравнениями (3), а третье описывает измерение расстояния $\|x(t)-z\|$ между точками $x(t)$ и $z=(z_1, z_2, z_3)$; в выражении (4) z имеет смысл координат местоположения прибора второго типа.

Ошибки измерений любого прибора статистически не связаны с ошибками измерения любого другого прибора и образуют во времени последовательности статистически независимых гауссовых реализаций с известными первыми двумя моментами.

В дальнейшем будет удобнее использовать уравнения приборов обоих типов в векторной форме:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \varphi_1(x(t), z)+\eta_1(t);\\
y_2(t) &= \varphi_2(x(t), z)+\eta_2(t);
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $y_1(t)=(y_{11}(t), y_{12}(t))^+$; $y_2(t)=(y_{21}(t), y_{22}(t), y_{23}(t))^+$; $\eta_1(t)=$ $=(\eta_{11}(t), \eta_{12}(t))^+$; $\eta_2(t)=(\eta_{21}(t);\ \eta_{22}(t), \eta_{23}(t))^+$; вектор-функции $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ являются вектор-столбцами неслучайных составляющих измерений приборов первого и второго типов соответственно.

Введем обозначения для первых двух моментов ошибок измерения:

$$
\begin{aligned}
&M[\eta_1(t)/x(t), z]=0;\\
&M[\eta_2(t)/x(t), z]=0;\\
&M\left[\eta_1(t)\,\eta_1^+(t)/x(t)=x, z\right]=G_1(x, z);\\
&M\left[\eta_2(t)\,\eta_2^+(t)/x(t)=x, z\right]=G_2(x, z),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где M — знак математического ожидания; $G_1(\cdot)$, $G_2(\cdot)$ — симметричные положительно-определенные матрицы порядка два и три соответственно.

Пусть рассматриваемая информационно-измерительная система содержит N_1 станций первого и N_2 станций второго типа и приборы размещаются в ограниченной области $X\subset E^3$. Обозначим: $N=(N_1, N_2)$.

План размещения N станций представим таблицей

$$\rho(N)=\begin{bmatrix} z_{11}z_{12}\ldots z_{1N_1} \\ z_{21}z_{22}\ldots z_{2N_2}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

где z_{ij} — координаты местоположения j-й по счету станций i-го типа, $i=1,2$.

При фиксированном плане размещения (7) имеем следующие уравнения измерительного канала системы:

$$\begin{aligned} y_1^{(k)}(t)&=\varphi_1(x(t),z_{1k})+\eta_1^{(k)}(t), \quad k=\overline{1,N_1}; \\ y_2^{(j)}(t)&=\varphi_2(x(t),z_{2j})+\eta_2^{(j)}(t), \quad j=\overline{1,N_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь верхний индекс кодирует номер прибора каждого типа, $t=\overline{1,T}$.

Примем, наконец, следующее условие: наблюдаемая траектория $x(t)$ находится в малой окрестности известной номинальной траектории $\bar{x}(t)$.

Постановка задачи. Назначение рассматриваемой информационно-измерительной системы — построение статистической оценки $\widehat{x}(t)$ траектории $x(t)$ по результатам измерений всех приборов $N=(N_1, N_2)$. Очевидно, что при любом допустимом фиксированном методе построения оценки $\widehat{x}(t)$ точностные ее характеристики будут меняться при изменении плана размещения приборов $\rho(N)$. Точность несмещенной оценки будем характеризовать корреляционной матрицей ее ошибок [2, 3]. Поэтому, прежде чем сформулировать критерии оптимальности размещения, найдем явную зависимость корреляционных матриц ошибок оценок от плана размещения приборов $\rho(N)$. В силу предположения о близости наблюдаемой траектории к номинальной приемлемыми по точности являются корреляционные матрицы наилучших линеаризованных оценок [3].

Пусть $\widehat{\theta}$ — наилучшая линеаризованная оценка вектора θ, тогда наилучшая линеаризованная оценка $\widehat{x}(t)=F^{+}(t)\widehat{\theta}$. Обозначим

$$\begin{aligned} D(\rho(N))&=M[(\widehat{\theta}-\theta)(\widehat{\theta}-\theta)^{+}]; \\ d(t,\rho(N))&=M[(\widehat{x}(t)-x(t))(\widehat{x}(t)-x(t))^{+}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно показать, что

$$d(t,\rho(N))=F^{+}(t)D(\rho(N))F(t), \tag{10}$$

поэтому достаточно найти явное выражение корреляционной матрицы $D(\cdot)$.

Далее принимается естественное предположение, что в X существует план размещения $\rho(N)$, при котором матрица $(\rho(N))$ невырожденная и, следовательно, информационная матрица Фишера $\Phi(\rho(N))=D^{-1}(\cdot)$.

Проведя линеаризацию уравнений канала измерений (8) в окрестности номинальной траектории $\bar{x}(t)$ и применяя затем формулу наилучшей линейной оценки для неизвестного вектора θ [3], получим следующее приближенное выражение информационной матрицы:

$$\Phi(\rho(N))\cong\Phi_1(\rho(N_1))+\Phi_2(\rho(N_2)), \tag{11}$$

где

$$\Phi_i(\rho(N_i))=\sum_{k=1}^{N_i}\sum_{t=1}^{T}A_i^{+}(t,z_{ik})\,G_i^{-1}(\bar{x}(t),z_{ik})\,A_i(t,z_{ik});$$

$$A_i(t,z)=\left[\frac{\partial\varphi_i(x(t),z)}{\partial x(t)}\right]\Big|_{x(t)=\bar{x}(t)}F^{+}(t),\quad i=\overline{1,2}. \tag{12}$$

Здесь в последней формуле в квадратных скобках — матрица из частных производных.

В качестве критерия оптимальности размещения могут быть выбраны различные функции от матрицы $D(\rho(N))$ (или $\Phi(\rho(N))$) аналогично тому, как это имеет место в теории регрессионного анализа [2]. Остановимся на D-критерии, согласно которому оптимальным считается размещение, минимизирующее объем эллипсоида рассеяния оценки.

Имеем следующие две задачи.

1. Найти

$$\max|\Phi(\rho(N))| \tag{13}$$

по всем планам $\rho(N)$ размещения в X фиксированного числа приборов двух типов $N=(N_1, N_2)$.

2. Найти

$$\min|d(t,\rho(N))| \tag{14}$$

по всем планам $\rho(N)$ размещения в X фиксированного числа приборов двух типов $N=(N_1, N_2)$, где момент времени t фиксирован в интервале $\overline{1,T}$.

В выражениях (13) и (14) прямые скобки означают определитель соответствующей матрицы.

В связи с тем, что установить свойства функционалов в (13) и (14) типа свойств монотонности и выпуклости аналитически не удается, ниже приводятся результаты машинного эксперимента по решению задач (13) и (14) с целью выявления практически приемлемого алгоритма решения.

Результаты машинного эксперимента. В качестве алгоритма решения сформулированных выше задач был выбран алгоритм покоординатного подъема (спуска) в следующей версии.

В допустимой области выбирается произвольное размещение приборов, затем точка расположения первого прибора покоординатно перемещается в пределах области с фиксированным шагом h до тех пор, пока функционал возрастает (убывает). Эта операция повторяется для каждой точки расположения приборов. Далее величина шага уменьшается вдвое и цикл повторяется.

Итерации прекращались на s-м цикле, если впервые выполнялось неравенство

$$\frac{|g_s-g_{s-1}|}{g_s}\leqslant\varepsilon,$$

где g_s, g_{s-1} — значения функционала в задаче (13) (или (14)) после s-го и $(s-1)$-го циклов; ε — положительная величина, меньшая единицы.

Применительно к задачам (13) и (14) описанный алгоритм опробован при 20 (в целом) различных условиях задач. В каждом случае счет повторяется 2—3 раза при различных начальных размещениях. Общее число приборов не превышало 5, номинальные траектории выбирались в классе параболических и так, что их проекции на плоскость $X_1 0 X_3$ находились в полосе между двумя симметричными допустимыми областями размещения:

$$X=X'\cup X'',$$

где

$$X' = \{z \mid a_0 \leqslant z_1 \leqslant a, \quad z_2 = 0, \quad 0 < b_0 \leqslant z_3 \leqslant b\},$$
$$X'' = \{z \mid a_0 \leqslant z_1 \leqslant a, \quad z_2 = 0, \quad -b \leqslant z_3 \leqslant -b_0\}.$$

Приведем два численных результата применения описанного алгоритма в задачах (13) и (14).

Общими условиями задач были следующие: число приборов первого типа (уравнения (3)) — 2, второго типа — 3; $X = \{z \mid 0 \leqslant z_1 \leqslant 280, z_2 = 0, |z_3| \geqslant 14, |z_3| \leqslant 70\}$; $h=7$, $T=100$ с, дискретность измерений 1 с, $\varepsilon = 0{,}01$, корреляционные матрицы ошибок приборов

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}; \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Пример 1. Номинальная траектория в задаче (13):

$$\bar{x}_1(t) = 20{,}1 + 1{,}9t; \qquad \bar{x}_2(t) = 10 - 0{,}02t - 0{,}0009t^2;$$
$$\bar{x}_3(t) = 0.$$

Координаты начального размещения:

$$z_{11} = (245;\ 0;\ 49), \quad z_{21} = (245;\ 0;\ 49),$$
$$z_{12} = (42;\ 0;\ -35), \quad z_{22} = (35;\ 0;\ -49),$$
$$z_{23} = (49;\ 0;\ 28),$$

где индекс ij означает j-й по счету прибор i-го типа.

Координаты конечного размещения:

$$z_{11} = (280;\ 0;\ 70), \quad z_{21} = (197,\ 75;\ 0;\ 14),$$
$$z_{12} = (0;\ 0;\ -70), \quad z_{22} = (42;\ 0;\ -14),$$
$$z_{23} = (54,\ 25;\ 0;\ 70).$$

Достигнутое значение $|\Phi(\cdot)| = 0{,}29875 \cdot 10^{-7}$, время счета на БЭСМ-6 — 10 мин.

Счет был повторен при следующем измененном начальном размещении:

$$z_{11} = (275;\ 0;\ 35), \quad z_{21} = (147;\ 0;\ 35),$$
$$z_{12} = (35;\ 0;\ -28), \quad z_{22} = (63;\ 0;\ -49),$$
$$z_{23} = (105;\ 0;\ 42);$$

при этом конечное размещение совпало с конечным в предыдущем счете, время счета — 9 мин.

Иной результат получен при следующем начальном размещении:

$$z_{11} = (147;\ 0;\ -28), \quad z_{21} = (35;\ 0;\ 56),$$
$$z_{12} = (14;\ 0;\ 35), \quad z_{22} = (175;\ 0;\ 42),$$
$$z_{23} = (168;\ 0;\ -35).$$

Конечное размещение здесь уже не совпадает с конечным в предыдущих случаях:

$$z_{11} = (280;\ 0;\ -70), \quad z_{21} = (33{,}25;\ 0;\ 14),$$
$$z_{12} = (0;\ 0;\ 70), \quad z_{22} = (150{,}5;\ 0;\ 70),$$
$$z_{23} = (143{,}5;\ 0;\ -14).$$

Последнему соответствовало значение функционала $|\Phi(\cdot)|=0{,}44163\cdot10^{-7}$, время счета — 10 мин.

Пример 2. В задаче (14) номинальная траектория выбрана следующей: $\bar{x}_1(t)=20{,}1+1{,}9t$; $\bar{x}_2(t)=20-0{,}02t-0{,}0009t^2$; $\bar{x}_3(t)=5-0{,}11t$.

Начальное размещение:

$$z_{11}=(245;\ 0;\ 49),\quad z_{21}=(245;\ 0;\ 49),$$
$$z_{12}=(42;\ 0;\ 35),\quad z_{22}=(35;\ 0;\ -49),$$
$$z_{23}=(49;\ 0;\ 28).$$

Конечное размещение для $t=5$ с:

$$z_{11}=(280;\ 0;\ 70),\quad z_{21}=(280;\ 0;\ 14),$$
$$z_{12}=(280;\ 0;\ -70)\quad z_{22}(33{,}2;\ 0;\ -14),$$
$$z_{23}=(280;\ 0;\ 14),$$

при этом $|d(5)|=0{,}17959\cdot10^{+7}$, $\Phi|(\cdot)|=0{,}10580\cdot10^{-6}$.

Конечное размещение для $t=95$ с:

$$z_{11}=(280;\ 0;\ 70),\quad z_{21}=(199{,}5;\ 0;\ 14),$$
$$z_{12}=(280;\ 0;\ -70),\quad z_{22}=(199{,}5;\ 0;\ -17{,}5),$$
$$z_{23}=(52{,}5;\ 0;\ 14),$$

при этом $|d(95)|=0{,}27247\cdot10^{+6}$, $|\Phi(\cdot)|=0{,}84103\cdot10^{-5}$. Общее время счета — 22 мин.

Изменение начального размещения в этой задаче приводит к конечному размещению, которое по значению $|d(\cdot)|$ может различаться на два порядка.

Приведенные примеры иллюстрируют следующие выводы, сделанные на всей совокупности 20 экспериментов с алгоритмом.

1. Функционалы в задачах (13) и (14) многоэкстремальные.
2. Оптимальное в смысле задачи (13) размещение однотипных приборов (3) или (4) находится на ближайших к оси $0X_1$ границах областей X' и X'', если наблюдаемая и номинальная траектории располагаются в плоскости, перпендикулярной плоскости $X_1 0 X_3$; в противном случае — на ближних и дальних границах.
3. В случае приборов двух типов (3) и (4) оптимальные в соответствии с (13) размещения находятся на ближних и дальних по отношению к оси $0X_1$ границах областей X' и X'', при этом приборы (3) размещаются в угловых точках X' и X''.
4. При оптимальном в смысле задачи (14) размещении приборов двух типов (3) и (4) предыдущее свойство в общем не наблюдается (см. пример 2), хотя приборы (3) по-прежнему размещаются в угловых точках.
5. Изменение начального размещения (при прочих неизменных условиях) в общем случае приводит в задаче (13) к разным решениям (конечным размещениям), но эквивалентным по порядку значений критерия $|\overline{\Phi}(\cdot)|$.
6. Решения задач (13) и (14) чувствительны к деформациям номинальной траектории.
7. Алгоритм улучшает значение критерия до двух порядков.

Из изложенного можно сделать следующие практические выводы: при решении задачи (13) с приборами (3) и (4) достаточно вести поиск решения на границах областей X' и X''; учитывая время счета на БЭСМ-6 и высокую, как правило, стоимость измерительных приборов типа (3) и (4), алгоритм покоординатного подъема (спуска) может быть применен для приближенного решения задач (13), (14) путем вариации начальных размещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абдулаев Ш.-С. О., Беседин Б. А.** О синтезе оптимальных фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем.— «Автометрия», 1974, № 2, с. 10—18.
2. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента. М., «Наука», 1971.
3. **Аоки М.** Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971.

Поступила в редакцию 16 марта 1977 г.;
окончательный вариант — 1 декабря 1977 г.

УДК 621.317.799 : 621.397.13 : 621.385.832

С. Л. ГОРЕЛИК, В. П. МАНДРАЖИ, А. Я. РЫФТИН

(*Ленинград*)

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ТЕЛЕВИЗИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТ НА ТРУБКЕ С НАКОПЛЕНИЕМ

При решении ряда задач обработки изображений возникает необходимость точного измерения координат объекта. Перспективно для этой цели использование телевизионных датчиков на передающей трубке с накоплением, которые, наряду с возможностью работы без промежуточной записи изображения на фотоноситель, обеспечивают высокую чувствительность при измерении. Такие датчики применяются в системах автоматизации обработки данных с трековых камер, в системах измерения координат астрообъектов, при обработке данных биологического и медицинского экспериментов, в подсистемах зрительной ориентации робота.

Учитывая дискретный характер телевизионного изображения, удобно представить реакцию телевизионного датчика на заданный входной объект в виде двумерной матрицы, элементами которой являются отсчеты видеосигнала на выходе датчика. Шаг дискретизации по кадру определяется шагом разложения, а по строке выбирается, например, по теореме Котельникова. Такое пространственное распределение отсчетов видеосигнала в плоскости изображения будем в дальнейшем условно называть передаточной матрицей трубки (ПМТ).

При разработке телевизионных систем, предназначенных для измерения координат, важно исследовать влияние распределений отсчетов в ПМТ на структуру измерительной системы и на точность измерений, особенно для датчиков на передающих трубках с накоплением, где ПМТ зависит от параметров входного светового воздействия, т. е. является нелинейной. Кроме того, преобразование изображения объекта в телевизионный сигнал пространственно неоднородно, т. е. ПМТ зависит от положения объекта в телевизионном растре, что обусловлено неоднородностью электронно-оптических аберраций фокусирующе-