каких линейных операций они предназначены. Что же касается ОУ, реализующих конкретные линейные операции: суммирования, вычитания, интегрирования, дифференцирования и т. п., то реализовать их нетрудно, если применять к рассмотренным схемам обычные правила построения таких устройств (см., например, [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волгин Л. И.** Аналоговые операционные преобразования с компенсацией методической погрешности.— ИКА, 1975, № 2 (4), с. 29.
2. **Волгин Л. И.** Операционные преобразователи с компенсацией методической погрешности последовательным включением управляемых источников тока и напряжения.— «Радиотехника», 1977, т. 32, № 3, с. 74.
3. **Шаталов А. С.** Структурные методы в теории управления и электроавтоматике. М.— Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. **Hallstein C. P.** Electric energy amplifying circuit arrangements.— United States Patent, № 3422336, kl. H 03f 1/02, January 14, 1969.
5. **Осмоловский П. Ф.** Итерационные многоканальные системы автоматического управления. М., «Сов. радио», 1969.
6. **Попов В. С., Ямпольский Ю. С.** Высокостабильный измерительный усилитель.— «Приборы и системы управления», 1972, № 2, с. 24.
7. **Бутт В. Е., Панков Б. Н.** Об использовании усилителей с обратной связью для улучшения характеристик широкополосных измерительных цепей уравновешивания.— В кн.: Материалы Всесоюзной конференции по измерительным системам «ИИС-77». Баку, изд. АзИНЕФТЕХИМ, 1977.
8. **Бутт В. Е., Панков Б. Н.** Усилительное устройство. Авт. свид-во, № 400972, ОИПОТЗ, 1973, № 40.
9. **Бутт В. Е., Панков Б. Н.** Усилительное устройство. Авт. свид-во, № 382220, ОИПОТЗ, 1973, № 22.
10. **Бутт В. Е., Панков Б. Н.** Об использовании метода итерации для улучшения характеристик операционных усилителей.— В кн.: Системы сбора и первичной обработки измерительной информации. Новосибирск, изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1973.
11. **Гутников В. С.** Применение операционных усилителей в измерительной технике. Л., «Энергия», 1975.
12. **Касперович А. Н., Литвинов Н. В., Попов Ю. А., Прокопенко В. И., Солоненко В. И., Слуев В. А.** Крейт измерительной системы сбора данных в стандарте CAMAC.— «Автометрия», 1976, № 1, с. 7.
13. **Проектирование** и применение операционных усилителей. Под ред. Грэма Дж., Тоби Дж., Хьюлсмана Л. М., «Мир», 1974.

Поступила в редакцию 27 февраля 1978 г.

УДК 681.3.00 : 621.38

В. В. ЕФИМЕНКО, А. С. ЗАГОРУЙКО, Ю. А. СТУКАЛИН

(Новосибирск)

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ УЧЕТА РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦ ПРИ АНАЛИЗЕ СХЕМ НА ЭВМ

Для электронных (электрических) схем характерна разреженность матриц [1—3] межузловых динамических проводимостей. Это свойство особо проявляется в схемах, содержащих несколько десятков узлов и более. При анализе на ЭВМ таких схем, например, узловым методом, основные затраты времени и памяти уходят на решение линейных уравнений вида

$$AX=B, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица межузловых динамических проводимостей размера $N\times N$; X, B — векторы размерности N (соответственно приращений узловых потенциалов и узловых токов).

В настоящее время для решения системы (1) предложен ряд алгоритмов [3, 4], учитывающих свойство разреженности матрицы A.

Эффективный учет разреженности матрицы A дает возможность экономить машинное время и память ЭВМ. Однако практическая эффективность этих алгоритмов мало исследована. Трудность заключается в том, что эффективность алгоритма зависит от условий его реализации: системы команд ЭВМ, языка реализации, свойств операционной системы ЭВМ и т. п. Поэтому в настоящей работе для конкретных условий сделана попытка получить некоторые сравнительные характеристики этих алгоритмов, основываясь на машинном эксперименте.

Сравнивались пять алгоритмов реализации решения уравнений (1) по методу Гаусса в комплексе программ анализа электронных схем узловым методом. Программный комплекс реализован на языке ФОРТРАН IV ДОС АСВТ машины М-4030. Комплекс программ имеет модульную структуру, и поэтому для каждого алгоритма в комплексе менялся лишь один модуль решения уравнений, время работы которого измерялось программным образом с помощью таймера ЭВМ. При решении (1) по методу Гаусса выполняются следующие операции:

$$a(i,\ k)=a(i,\ k)/a(k,\ k); \tag{2}$$

$$a(i,\ j)=a(i,\ j)-a(i,\ k)\,a(k,\ j); \tag{3}$$

$$b(i)=b(i)-a(i,\ k)\,b(k); \tag{4}$$

$$b(i)=b(i)/a(i,\ i), \tag{5}$$

где $a(i,\ j)$ — элемент i-й строки и j-го столбца матрицы A; $b(i)$ — элемент вектора $\boldsymbol{B}$.

В выражениях (2)—(5) значения элементов справа от равенства старые, слева — после выполнения операций. Процесс исключения осуществляется операциями (2)—(4), обратная подстановка — (4), (5).

При учете разреженности матрицы A операции (2)—(5) реализуются только над ненулевыми элементами. Необходимо отметить, что при моделировании нелинейных динамических схем значение компонент матрицы A меняется, в связи с этим нулевыми считаются те, которые всегда равны нулю, в том числе и в процессе гауссового исключения. Эту итоговую разреженность (количественно — процент нулевых элементов) можно увеличить путем перестановки строк и столбцов матрицы A. В данном случае упорядочение осуществлялось по методу [1].

В качестве основы для сравнения алгоритмов взят обычный вариант реализации метода Гаусса. С ним сравнивались алгоритмы проверок, косвенной идексации, интерпретации, генерации операторов.

Алгоритм проверок основан на том, что операция проверки элемента на нулевое значение выполняется значительно быстрее операции умножения. Исключение идет по столбцам. Априори полагается, что диагональные элементы матрицы A и элементы вектора $\boldsymbol{B}$ не равны нулю. Проверка на нулевое значение компонент A проводится в следующем порядке. Сначала по очереди проверяются элементы исключаемого столбца (например, k), лежащие ниже диагонали. Если какой-нибудь из них не равен нулю, то выполняются операции (2), (4). Далее проверяются элементы k-й строки, лежащие правее диагонали, и если какой-нибудь из них не равен нулю, то выполняется (3). При обратной подстановке проверяются элементы матрицы A, лежащие правее диагонали, и выполняются (4), (5). Перед исключением никакой дополнительной обработке матрица A не подвергается.

Оставшиеся три алгоритма основаны на предположении, что расположение нулевых элементов фиксировано. Матрица A хранится в уплотненном виде, для чего формируется вектор ненулевых элементов матрицы A и два вспомогательных вектора-указателя, связывающие координаты вектора ненулевых элементов. При этом один вектор-указатель задает последовательность номеров столбцов матрицы A, в которых находятся элементы вектора ненулевых значений при просмотре последовательно строка за строкой; другой вектор-указатель задает расположение первых ненулевых элементов для каждой строки матрицы A в векторе ненулевых значений.

Алгоритм косвенной индексации использует вектор ненулевых значений матрицы A, координаты элементов для операций (2)—(5) задаются через ранее упомянутых два вектора-указателя. Подпрограмма решения уравнений, как и для обычного метода Гаусса, имеет циклическую структуру, но только в ней применяется косвенная индексация.

В алгоритмах интерпретации и генерации также используется вектор ненулевых элементов, но дополнительно имитируется процесс исключения и обратной подстановки, в результате чего определяются последовательность операций (2)—(5), которая будет осуществляться в ходе решения при данной структуре ненулевых элементов матрицы A, и явные адреса операндов в выражениях (2)—(5) в векторе ненулевых элементов.

Алгоритм генерации заключается в том, что в процессе имитации исключения и обратной подстановки сразу генерируются фортранные операторы (2)—(5). Полученная последовательность фортранных операторов составляет «тело» подпрограммы решения уравнений.

В алгоритме интерпретации информация об операциях (2)—(5), полученная в ходе имитации, кодируется в специальной таблице. В эту таблицу для всех операций, которые будут выполняться при данной структуре матрицы A, заносится код операции и явные адреса операндов этих операций в векторе ненулевых элементов. Поэтому подпрограммой решения уравнений является программа-интерпретатор, которая анализирует эту таблицу и выполняет соответствующие операции.

Сравнение эффективности рассмотренных алгоритмов учета разреженности велось по двум критериям — требуемой машинной памяти и быстродействию.

Алгоритм проверок требует практически такую же память, как и обычный вариант метода Гаусса. Память квадратично зависит от количества узлов схемы. Например, на АСВТ М-4030 с памятью 256 кбайт максимальный размер анализируемой схемы — порядка 200 независимых узлов.

Оперативная память для реализации алгоритма косвенной индексации, алгоритма интерпретации и алгоритма генерации возрастает (в порядке их перечисления) от первого к третьему, и чем меньше разреженность, тем эта зависимость больше. Память, требуемая для алгоритма косвенной индексации, оцениваемая грубо, зависит линейно от количества ненулевых элементов матрицы A [1]. Для упомянутой выше машины этот алгоритм позволяет рассчитывать регулярные схемы (например, цепочные) до 1000 узлов и 6000 ненулевых элементов.

В случае алгоритма интерпретации, кроме памяти для хранения ненулевых значений матрицы, требуется еще память, пропорциональная количеству выполненных операций для запоминания последовательности операций и адресов их операндов. В среднем на одну операцию требуется 4 машинных полуслова. Алгоритм генерации занимает самую большую память. Объем памяти также пропорционален количеству выполняемых операций (2)—(5), но затраты на одну операцию значительно выше. Они определяются количеством машинных команд, требуемых для реализации оператора типа (2)—(5), что зависит от эффективности используемого транслятора (в данном случае — с языка ФОРТРАН).

Сравнение эффективности алгоритмов по машинному времени приведено в таблице относительной эффективности алгоритмов по быстродействию. (Данные по эффективности алгоритма генерации при заполненности ненулевыми элементами матрицы A свыше 70% не приводятся).

Относительная эффективность алгоритмов по быстродействию

Заполненность матрицы, %	Отношение быстродействий данного алгоритма к обычному алгоритму метода Гаусса, %			
	алгоритм проверок	алгоритм косвенной индексации	алгоритм интерпретации	алгоритм генерации
13,6	228	376	380	480
15,7	217	316	333	441
19,4	198	261	275	400
24,8	178	182	209	339
28,1	168	153	184	322
31,8	155	127	162	301
36,0	147	104	142	278
40,5	139	87	125	258
50,8	124	61	99	224
63,0	115	44	80	201
69,4	105	38	72	190
76,5	99	33	66	—
100	88	22	50	—

В этой таблице в первом столбце указана в процентах итоговая заполненность ненулевыми элементами матрицы A (отношение количества ненулевых элементов к общему количеству элементов). В последующих столбцах приводятся значения эффективности по быстродействию рассмотренных алгоритмов учета разреженности. Здесь эффективность характеризуется отношением затрат машинного времени для решения системы (1) при использовании соответствующего алгоритма к затратам машинного времени при применении обычного варианта (без учета разреженности) метода Гаусса. Данные в таблице приведены без учета дополнительных затрат времени, связанных с упаковкой матрицы A, с формированием таблицы кодов операций и их операндов или с генерацией ФОРТРАН-операторов и трансляцией подпрограммы, состоящей из этих операторов, а также с дополнительной сборкой головной программы. Исключение составляют данные для алгоритма проверки, в котором перечисленные затраты отсутствуют.

Как видно из таблицы, при заполненности до 25% эффективность алгоритмов растет обратно пропорционально затратам машинной памяти: она максимальна для алгоритма генерации и минимальна для алгоритма проверок. Заметим, что алгоритм проверок выгодно применять при заполненности до 75%, алгоритм косвенной индексации — при заполненности до 37%, алгоритм интерпретации — при заполненности до 50%. Согласно данным таблицы, алгоритм генерации является самым быстродействующим при любой степени заполненности матрицы A. Так как не учтены дополнительные затраты времени, то для всех алгоритмов, исключая алгоритм проверок, эти выводы справедливы в случае многократных решений (1) при фиксированной структуре нулевых элементов матрицы A и при разных значениях ненулевых элементов. Практически эта задача возникает при многовариантном анализе электронных схем, параметрическом синтезе и т. п.

Рассматривая дополнительные затраты времени, необходимо обратить внимание на то, что упаковка матрицы, как правило, выполняется без обращения к внешней памяти ЭВМ, формирование таблицы для алгоритма интерпретации в зависимости от размера схемы и степени заполненности уже может требовать обращения к внешней памяти, а алгоритм генерации, хотя бы из-за наличия сборки, всегда требует обращения к внешней памяти. Очевидно, что там, где есть обращение к памяти на внешних носителях, дополнительные затраты времени могут быть значительными (единицы или десятки минут). Затраты, связанные с обработкой в оперативной памяти, не столь существенны даже для больших схем, так как выполняется в основном логическая обработка данных, где применяются быстродействующие команды ЭВМ. В связи с этим для случая однократных просчетов системы (1) можно дать следующие рекомендации. При однократном анализе схемы порядка 10 узлов имеет смысл пользоваться обычным вариантом реализации метода Гаусса, для схем, содержащих 10—30 узлов,— методом алгоритма проверок; для схем, содержащих свыше 30—50 узлов,— методом косвенной индексации.

Если оценивать эффективность сразу по двум критериям, то необходимо отметить, что не существует алгоритма, более эффективного среди других как по критерию требуемой машинной памяти, так и по критерию быстродействия. Скорее, можно отметить обратную зависимость: чем больше быстродействие, тем больше требуемая память. При этом чем меньше разреженность, тем эта зависимость сильнее выражена.

В заключение необходимо отметить, что только гибкий подход к выбору программ решения линейных алгебраических уравнений, учитывающий размер схемы, ее разреженность, объем требуемых вычислений, позволит наиболее эффективно решить задачу машинного проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Berry P. D.** An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution.— "IEEE Trans. Circuit Theory", 1971, vol. ct-18, N 1, p. 40—50.
2. **Норенков И. П., Мулярчик С. Г., Иванов С. А.** Экстремальные задачи при схемотехническом проектировании в электронике. Минск, изд. БГУ, 1976.
3. **Тьюарсон Р.** Разреженные матрицы. М., «Мир», 1977.
4. **Dembart B. and Erisman A. M.** Hibrid sparse-matrix methods.— "IEEE Trans. Circuit Theory", 1973, vol. ct-20, N 6, p. 641—649.

Поступила в редакцию 4 января 1978 г.

УДК 53.088.6

В. В. ШЕВЧУК

(Москва)

СПОСОБ УМЕНЬШЕНИЯ АДДИТИВНОЙ ПОГРЕШНОСТИ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

В большинстве случаев измеряемая величина и погрешность являются независимыми. Это позволяет уменьшать влияние погрешности на результат измерения, используя возможность изменения измеряемой величины или погрешности в процессе измерения, для чего получаемые в этом случае результаты наблюдений обрабатывают соответствующим образом.

Например, в тензометрии широко используется способ, заключающийся в питании тензорезисторов переменным напряжением прямоугольной формы, двукратном наблюдении сигнала при положительной и отрицательной полярности напряжения источника питания и вычитании результатов наблюдений [1, 2]. Подобный способ применим также и при измерении сигналов с генераторных преобразователей, например термопар, где может оказаться целесообразным изменение помехи [3]. В этих случаях в результат измерения войдет не вся погрешность, вызываемая помехой, а только ее приращение за промежуток времени между наблюдениями. Впоследствии способ был дополнен до трех наблюдений [4].