Пример. Пусть $d_3=29$. Выбирая вначале $d_1=1$, получим зависимость радиуса R области $\overline{B}^{(0)}$ решающей схемы рассматриваемого алфавитного метода от изменения шкалы d_2 (рис. 4). Интересно заметить, что наибольших значений R достигает на концах области определения $d_2=\overline{2,\ d_3-1}$. Следующий по величине (локальный) максимум находится в середине интервала изменения d_2, еще меньшие — вблизи точек $d_3/3$ и $2d_3/3$ и т. д. Наименьшего значения R достигает в точках d_2, равных 5, 6, 23, 24. Согласно доказанной теореме, при этом вероятность $P_{d_2}\{\hat{k}_3=k_3\}$ правильного восстановления параметра k_3 максимальна. Таким образом, в рассматриваемом примере оптимальным набором шкал является, например, тройка чисел 1, 5, 29. В силу изложенного ранее оптимальными являются также наборы шкал, полученные из указанного с помощью преобразования (4), например, 9, 16, 29; 10, 21, 29 и другие.

Для оптимальных наборов шкал вероятность правильного восстановления параметра k_3 при $\sigma=0{,}04$ равна 0,96, в то время как для набора 1, 14, 29 она составляет 0,68.

Есть основания предполагать, что минимум R достигается при значении d_2, лежащем вблизи $\sqrt{d_3}$. Однако установить этот факт аналитически не удалось ввиду весьма сложной зависимости R от d_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И.** О разрешении неоднозначности циклических измерений.— «Автометрия», 1972, № 4, с. 63—68.
2. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
17 августа 1977 г.

УДК 621.396.969.11

Г. И. СКРЫПНИК

(Москва)

О РЕКУРРЕНТНОЙ ПРОЦЕДУРЕ РАСКРЫТИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная задача обработки информации в радиоинтерферометрических системах определения координат объекта состоит в нахождении однозначной оценки определяемого параметра (дальности или направляющего косинуса) по результатам неоднозначных измерений дробных частей фазы в шкалах, различающихся значениями масштабных коэффициентов [1, 2]. Априорные сведения о многошкальной системе представлены в виде неполной линейной системы целочисленных уравнений

$$x=(k_1+\varphi_1)/d_1=\ldots=(k_i+\varphi_i)/d_i=\ldots=(k_m+\varphi_m)/d_m, \qquad (1)$$

где x — определяемый параметр, принимающий значение из интервала $[a,\ b)$; $k_i=[d_ix]^+$ и $\varphi_i=\{d_ix\}^+$ — соответственно целая и дробная части фазы $\Phi_i=d_ix$; d_i — масштабный коэффициент i-й шкалы; $d_m\ (d_m>d_l,\ l\neq m)$ — внешний масштаб системы; m — число шкал. Наблюдаемые значения дробных частей фазы $\hat{\varphi}_i=\{\varphi_i+\psi_i\}^+$ в общем случае содержат случайные ошибки измерений

$$\psi_i=\{\hat{\varphi}_i-\varphi_i+1/2\}^+-1/2, \quad i=\overline{1,\ m}, \qquad (2)$$

с заданной совместной плотностью вероятностей $G(\psi)=W(\psi_1, \ldots, \psi_m)$. Легко видеть, что при непосредственной подстановке $\widehat{\varphi}_i$ в (1) возникнет рассогласование шкал, проявляющееся в изменении как целой, так и дробной части фазы, т. е.

$$k_i+\widehat{\varphi}_i\equiv k_i+\varphi_i+\psi_i-[\varphi_i+\psi_i]^+=k_i+\varphi_i-\delta k_i+\psi_i.$$

При этом слагаемое $\delta k_i=[\varphi_i+\psi_i]^+$ описывает перебросы фазы на ±1 цикл, вызываемые ошибкой ψ_i. Чтобы исключить влияние перебросов фазы в многошкальной системе, необходимо представить разыскиваемую величину параметра x по шкале с наибольшим масштабом в следующем виде:

$$x_m=(n_m+\widehat{\varphi}_m-\xi_m)/d_m, \tag{3}$$

где $n_m=k_m+\delta k_m$, $\delta k_m=[\varphi_m+\psi_m]^+$ и неизвестный параметр ξ_m принимает значение в интервале $[-1/2, 1/2)$.

Наиболее распространенным критерием оптимальности, применяемым для нахождения оценки $\widehat{x}_m$, является максимум функции правдоподобия [3], которая в данном случае имеет вид [1]

$$L(x)\equiv W(\widehat{\varphi}/x)=G(\{\widehat{\varphi}_1-d_1x+1/2\}^+-1/2, \ldots, \{\widehat{\varphi}_m-d_mx+1/2\}^+-1/2). \tag{4}$$

Если подставить (3) в (4) и ввести новые переменные $a_m^{(l)}(n_m)=\{d_ln_m/d_m\}^+$, $\widehat{b}_m^{(l)}=\{\widehat{\varphi}_l-d_l\widehat{\varphi}_m/d_m\}^+$, $z_m^{(l)}(n_m)=\{\widehat{b}_m^{(l)}-a_m^{(l)}(n_m)+1/2\}^+-1/2$, $l=\overline{1, m-1}$, рассматриваемые в евклидовом пространстве R_{m-1} размерности $(m-1)$, то задача оптимизации функции $L(x)$ может быть сведена к смешанной непрерывно-дискретной экстремальной задаче, решаемой в два последовательных этапа:

$$\max_{a\leq x<b} L(x)=\max_{a_m(n_m)\in A_m}\ \max_{-\frac{1}{2}\leq\xi_m<\frac{1}{2}} G\left(\left\{z_m^{(1)}(n_m)+\frac{d_1\xi_m}{d_m}+1/2\right\}^+-\right.$$
$$\left.-1/2, \ldots, \left\{z_m^{(m-1)}(n_m)+\frac{d_{m-1}\xi_m}{d_m}+1/2\right\}^+-1/2,\ \xi_m\right), \tag{5}$$

где A_m — множество точек $a_m=(a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(m-1)})$, образующее алфавит состояний многошкальной системы. На первом этапе находится неоднозначная оценка $\widehat{\xi}_m=f_m[z_m(n_m)]$, уточняющая значение дробной части фазы $\widehat{\varphi}_m$ и доставляющая условный максимум $L(x)$ при $z_m(n_m)=(z_m^{(1)}(n_m), \ldots, z_m^{(m-1)}(n_m))=\text{const}$. На втором этапе в (5) полагается $\xi_m=\widehat{\xi}_m$ и находится значение $\widehat{a}_m$, дающее абсолютный максимум $L(x)$, т. е. решается задача раскрытия неоднозначности оценки $\widehat{\xi}_m$: $\widehat{a}_m(n_m)\Rightarrow\widehat{n}_m$. Следуя [1], введем эквивалентное представление алгоритма раскрытия неоднозначности в виде решающей схемы. Для построения решающей схемы необходимо разбить область изменения параметра $\widehat{b}_m\in\Theta_{m-1}$, являющуюся в R_{m-1} $(m-1)$-мерным гиперкубом, в соответствии с алфавитом состояний $A_m\subset\Theta_{m-1}$, содержащим q_m элементов, на q_m непересекающихся множеств $B^{(0)}, \ldots, B^{(p_m)}, \ldots, B^{(q_m-1)}$ таким образом, чтобы при каждом попадании $\widehat{b}_m$ в область $B^{(p_m)}$ функция $G(\{z_m^{(1)}+d_1f(z_m)/d_m+1/2\}^+-1/2, \ldots, \{z_m^{(m-1)}+d_{m-1}f(z_m)/d_m+1/2\}^+-1/2, f(z_m))$ достигала максимума при $z_m(n_m)=z_m(p_m)$. Тогда

$$\widehat{b}_m\in B^{(n_m)}\Rightarrow\widehat{n}_m. \tag{6}$$

С помощью введенных построений, дающих обобщение результатов работы [1], нетрудно сформулировать следующие условия существования однозначной оценки.

Теорема 1. Для существования однозначной оценки (3) необходимо и достаточно наличие не более одной точки $\psi \in R_m$, доставляющей $\max G(\psi)$, и выполнение неравенства

$$[(1-\varepsilon)\, bd_m]^+ - [ad_m]^+ + 3 \leqslant q_m = \text{НОК}\left(q_m^{(1)}, \ldots, q_m^{(l)}, \ldots, q_m^{(m-1)}\right), \tag{7}$$

где ε — бесконечно малая положительная величина, введенная для замыкания интервала изменения x; q_m — число точек алфавита A_m, равное наименьшему общему кратному чисел $q_m^{(1)}, \ldots, q_m^{(l)}, \ldots, q_m^{(m-1)}$, и $q_m^{(l)}$ — знаменатель отношения d_l/d_m после его приведения к несократимой целочисленной дроби.

Широкое распространение в инженерной практике нашли решающие схемы раскрытия неоднозначности (6) простейшей геометрии, образованные системой $(m-1)$-мерных параллелепипедов-брусков

$$B^{(n_m)}: -\delta_l \leqslant z_m^{(l)}(n_m) < \delta_l, \quad l = \overline{1, m-1}, \tag{8}$$

с гранями, параллельными координатным плоскостям R_{m-1}, и с длинами ребер $2\delta_l$, не зависящими от n_m. Специфика рассматриваемого алгоритма такова, что при своей реализации он требует проверки выполнения системы неравенств (8) по всем q_m состояниям системы. При большом количестве шкал и числе состояний это связано со значительными затратами времени и с введением дополнительного оборудования. В этой связи представляет интерес установление простых вычислительных процедур раскрытия неоднозначности, эквивалентных решающей схеме (6), (8). Оказывается, что такие процедуры существуют, причем они имеют легко реализуемую на ЭВМ рекуррентную форму представления с числом шагов, равным числу вспомогательных шкал $m-1$. Прежде чем дать формальное описание процедур, сформулируем необходимую для этого теорему о разбиении гиперкуба на плотноупакованные бруски, в которой в общем виде устанавливается связь между длинами ребер брусков и масштабными коэффициентами.

Теорема 2. Система из q_m циклически идентичных брусков с длинами ребер

$$2\delta_{l_\alpha} = 1/q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant m-1, \tag{9}$$

где число $q_{m-\alpha}^{(l)} \equiv q_{m-\alpha+1}^{(l)} \Big/ \left(q_{m-\alpha+1}^{(l)}, q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}\right)^+$ является знаменателем несократимой дроби $\tilde{q}_l^{(m-\alpha)}/q_{m-\alpha}^{(l)} \equiv q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}/q_{m-\alpha+1}^{(l)}$; $l_\alpha \neq l_\beta$ при $\alpha \neq \beta$; $q_m^{(l_1)}$ — любое фиксированное число из ряда чисел $q_m^{(1)}, \ldots, q_m^{(m-1)}$ и скобками $(,)^+$ обозначен наибольший общий делитель двух чисел, образует в соответствии с точками алфавита, расположенными в центре брусков, плотноупакованное разбиение гиперкуба Θ_{m-1} так, что $\prod\limits_{\alpha=1}^{m-1} 2\delta_{l_\alpha} = 1/q_m$.

Заметим, что процедура разбиения не зависит от начального значения числа $q_m^{(l_1)}$. Следовательно, число возможных вариантов не будет превышать $(m-1)!$. Подчеркнем также, что длины ребер (9) не зависят от чисел $q_l^{(m)}$, являющихся числителями в целочисленном представлении отношений d_l/d_m, $l = \overline{1, m-1}$. Указанным свойством инвариантности обладает и алфавит состояний A_m. Доказательство теоремы 2 базировалось на свойстве циклической аддитивности алфавита и осуществлялось методом покоординатного исключения точек алфавита, рассматриваемого ниже при выводе рекуррентной процедуры раскрытия неоднозначности.

Пример 1. Проиллюстрируем результаты теорем 1 и 2 на примере системы из шести шкал с коэффициентами $d_1=1/6$, $d_2=2/15$, $d_3=4/25$, $d_4=24/125$, $d_5=1/8$, $d_6=1$. Знаменатели и наименьшее общее кратное системы равны: $q_6^{(1)}=6$, $q_6^{(2)}=15$, $q_6^{(3)}=25$, $q_6^{(4)}=125$, $q_6^{(5)}=8$ и $q_6=3000$. Из соотношения (7) вытекает ограничение на интервал изменения однозначно восстанавливаемого параметра x, т. е. $[(1-\varepsilon)b]^+-[a]^++3\leqslant 3000$. В частности, этому условию удовлетворяет интервал $[1, 2999]$. Из 5! вариантов разбиения Θ_5 наиболее равномерными длинами ребер обладают бруски (так называемые «дискреты» алфавита), получаемые из (9) при $l_\alpha=\alpha$. На первом шаге имеем: $l_1=1$, $2\delta_{l_1}=2\delta_1=1/6$, $q_5^{(2)}=5$, $q_5^{(3)}=25$, $q_5^{(4)}=125$, $q_5^{(5)}=4$. Далее находим: $l_2=2$, $2\delta_{l_2}=2\delta_2=1/5$, $q_4^{(3)}=5$, $q_4^{(4)}=25$, $q_4^{(5)}=4$; $l_3=3$, $2\delta_{l_3}=2\delta_3=1/5$, $q_3^{(4)}=5$, $q_3^{(5)}=4$; $l_4=4$, $2\delta_{l_4}=2\delta_4=1/5$, $q_2^{(5)}=4$; $l_5=5$, $2\delta_{l_5}=2\delta_5=1/4$. Таким образом, набор длин ребер бруска по шкалам составляет (1/6, 1/5, 1/5, 1/5, 1/4). Если исключить разбиения с длинами ребер $2\delta_l=1$, соответствующие меньшему числу шкал, то существует еще три варианта разбиения Θ_5 на бруски с длинами ребер (1/2, 1/15, 1/5, 1/5, 1/4), (1/2, 1/3, 1/25, 1/5, 1/4), (1/3, 1/5, 1/5, 1/5, 1/8).

Дадим формальное описание рекуррентной процедуры раскрытия неоднозначности фазовых измерений в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Решающая схема (6), представленная в виде плотноупакованных брусков (8) с длинами ребер, определяемыми с помощью процедуры (9), эквивалентна при выполнении (7) следующей процедуре раскрытия неоднозначности:

$$n_m = r_{l_1} + q_m^{(l_1)}\left(r_{l_2} + q_{m-1}^{(l_2)}\left(r_{l_3} + \ldots + q_{m-\alpha+2}^{(l_{\alpha-1})}\left(r_{l_\alpha} + \ldots + q_3^{(l_{m-2})} r_{l_{m-1}}\right)\right)\right), \tag{10}$$

где $r_{l_\alpha}=(-1)^{s_\alpha} u_{l_\alpha} P_{s_\alpha-1}$, $u_{l_\alpha}=q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}\left\{\left[q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}\widehat{b}_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}+1/2\right]^+/q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}\right\}^+$, $\widehat{b}_{m-\alpha+1}^{(l)}=\{\widehat{b}_{m-\alpha+2}^{(l)}-q_l^{(m-\alpha+2)}r_{l_{\alpha-1}}/q_{m-\alpha+2}^{(l)}\}^+$, $q_{m-\alpha}^{(l)}=q_{m-\alpha+1}^{(l)}/\left(q_{m-\alpha+1}^{(l)}, q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}\right)^+$, $q_l^{m-\alpha}=q_l^{(m-\alpha+1)}q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}/\left(q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}, q_{m-\alpha+1}^{(l)}\right)^+$, $P_{s_{\alpha-1}}$ — числитель предпоследней (s_α—1) подходящей дроби при разложении отношения $q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}/q_{(l_\alpha)}^{(m-\alpha+1)}$ в цепную дробь и l_α — номер шкалы, для которой $2\delta_{l_\alpha}=1/q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}$.

Доказательство. Положим $l=l_1$, $2\delta_{l_1}=1/q_m^{(l_1)}$ и рассмотрим неравенство

$$-1/\left(2q_m^{(l_1)}\right)\leqslant\{\widehat{b}_m^{(l_1)}-a_m^{(l_1)}(n_m)+1/2\}^+-1/2<1/\left(2q_m^{(l_1)}\right),$$

входящее в (8). При выполнении (7) и фиксированном значении $\widehat{b}_m^{(l_1)}$ параметр $a_m^{(l_1)}(n_m)$ принимает одно из значений: $0, 1/q_m^{(l_1)}, \ldots, \left(q_m^{(l_1)}-1\right)/q_m^{(l_1)}$. Следовательно, данное неравенство дает единственное решение

$$a_m^{(l_1)}(n_m)=u_{l_1}/q_m^{(l_1)},$$

где $u_{l_1}=q_m^{(l_1)}\{[q_m^{(l_1)}\widehat{b}_m^{(l_1)}+1/2]^+/q_m^{(l_1)}\}^+$ — **наименьший неотрицательный** вычет по модулю $q_m^{(l_1)}$ числа $[q_m^{(l_1)}\widehat{b}_m^{(l_1)}+1/2]^+$. В свою очередь, числа u_{l_1} и n_m связаны с помощью линейного сравнения $q_{l_1}^{(m)}n_m\equiv u_{l_1}\pmod{q_m^{(l_1)}}$. Согласно [4, с. 114, теорема 133], данное сравнение имеет следующее решение:

$$n_m=r_{l_1}+t_{l_1}q_m^{(l_1)}$$

($r_{l_1}=(-1)^{s_1}u_{l_1}P_{s_1-1}$, P_{s_1-1} — числитель предпоследней (s_1-1) подходящей дроби при разложении отношения $q_m^{(l_1)}/q_{l_1}^{(m)}$ в цепную дробь). Целые числа t_{l_1} задают $q_m/q_m^{(l_1)}$ точек алфавита A_m, расположенных на гиперплоскости $a_m^{(l_1)}(n_m)=u_{l_1}/q_m^{(l_1)}$. Введем на данной гиперплоскости вложенное в R_{m-2} подмножество точек

$$A_{m-1}: a_{m-1}^{(l)}(t_{l_1})=\{q_l^{(m-1)}t_{l_1}/q_{m-1}^{(l)}\}^+=\{a_m^{(l)}(n_m)-q_l^{(m)}r_{l_1}/q_m^{(l)}\}^+,\quad l\neq l_1,$$

где $q_{m-1}^{(l)}=q_m^{(l)}/(q_m^{(l)},\, q_m^{(l_1)})^+$, $q_l^{(m-1)}=q_l^{(m)}q_m^{(l_1)}/(q_m^{(l_1)},\, q_m^{(l)})^+$, а также изменим в (8) измеряемый параметр $\widehat{b}_{m-1}^{(l)}=\{\widehat{b}_m^{(l)}-q_l^{(m)}r_{l_1}/q_m^{(l)}\}^+$. Тогда для определения числа t_{l_1} может быть использована схема первого этапа. Положим $l=l_2$, $2\delta_{l_2}=1/q_{m-1}^{(l_2)}$ и решаем неравенство на втором шаге $-1/(2q_{m-1}^{(l_2)})\leqslant\{\widehat{b}_{m-1}^{(l_2)}-a_{m-1}^{(l_2)}(t_{l_1})+1/2\}^+-1/2<1/(2q_{m-1}^{(l_2)})$. В результате получим $t_{l_1}=r_{l_2}+t_{l_2}q_{m-1}^{(l_2)}$, где $r_{l_2}=(-1)^{s_2}u_{l_2}P_{s_2-1}$, $u_{l_2}=q_{m-1}^{(l_2)}\{[q_{m-1}^{(l_2)}\widehat{b}_{m-1}^{(l_2)}+1/2]^+/q_{m-1}^{(l_2)}\}^+$, P_{s_2-1} — числитель предпоследней подходящей дроби при разложении $q_{m-1}^{(l_2)}/q_{l_2}^{(m-1)}$ в цепную дробь и целые числа t_{l_2} задают в R_{m-3} подмножество A_{m-2}, содержащее $q_m/(q_m^{(l_1)}q_{m-1}^{(l_2)})$ точек. Продолжая аналогичным образом покоординатное исключение точек алфавита, на $(m-1)$ шаге получим в силу равенства $q_m=\prod_{\alpha=1}^{m-1}q_{m-\alpha+1}^{(l_\alpha)}$ пустое множество A_1. Следовательно, процедура (10), охватывающая все этапы последовательного уточнения числа n_m, эквивалентна решающей схеме (6), (8), что и требовалось доказать.

Следует подчеркнуть, что каждому разбиению Θ_{m-1} на бруски отвечает своя процедура раскрытия неоднозначности, зависящая от чисел $q_l^{(m)}$, $q_m^{(l)}$ и дающая безошибочное решение задачи для конкретного интервала изменения x_m при выполнении условий $-\delta_l\leqslant\{\psi_l-d_l\psi_m/d_m+1/2\}^+-1/2<\delta_l$, $l=\overline{1,\ m-1}$, вытекающих из соотношений (8).

Пример 2. Рассмотрим для системы из пяти шкал $d_1=48$, $d_2=30$, $d_3=62\cdot 5$, $d_4=75$, $d_5=450$ две рекуррентные процедуры раскрытия неоднозначности. Алфавит состояний системы $a_5^{(1)}=\{8n_5/75\}^+$, $a_5^{(2)}=\{n_5/15\}^+$, $a_5^{(3)}=\{5n_5/36\}^+$, $a_5^{(4)}=\{n_5/6\}^+$ содержит $q_5=900$ точек и в соответствии с (9) допускает разбиение Θ_4 на дискреты алфавита с длинами ребер (1/5, 1/5, 1/6, 1/6) при $l_\alpha=5-\alpha$. Для выбранного разбиения процедура (10) имеет следующий вид:

$$n_5=r_4+6(r_3+6(r_2+5r_1)),$$

где

$$r_4=u_4=6\{[6\widehat{b}_5^{(4)}+1/2]^+/6\}^+,\qquad \widehat{b}_5^{(4)}=\{\widehat{\varphi}_4-\widehat{\varphi}_5/6\}^+,$$

$$r_3=-u_3,\quad u_3=6\{[6\widehat{b}_4^{(3)}+1/2]^+/6\}^+,\qquad \widehat{b}_4^{(3)}=\{\widehat{\varphi}_3-5\widehat{\varphi}_5/36-5r_4/36\}^+,$$

$$r_2=-2u_2,\quad u_2=5\{[5\widehat{b}_3^{(2)}+1/2]^+/5\}^+,\qquad \widehat{b}_3^{(2)}=\{\widehat{\varphi}_2-\widehat{\varphi}_5/15-$$

$$-r_3/15-2r_3/5\}^+,$$

$$r_1=u_1=5\{[5\widehat{b}_2^{(1)}+1/2]^+/5\}^+,\qquad \widehat{b}_2^{(1)}=\{\widehat{\varphi}_1-8\widehat{\varphi}_5/75-8r_4/75-$$

$$-16r_3/25-96r_2/25\}^+.$$

Она обеспечивает безошибочное раскрытие неоднозначности при изменении параметра x_m в интервале $(-1,\ 1]$ (или x в интервале $[-1+1/450,\ 1-1/450)$) при выполнении неравенств:

$$-1/10\leqslant\{\psi_1-8\psi_5/75+1/2\}^+-1/2<1/10,$$
$$-1/10\leqslant\{\psi_2-\psi_5/15+1/2\}^+-1/2<1/10,$$
$$-1/12\leqslant\{\psi_3-5\psi_5/36+1/2\}^+-1/2<1/12,$$
$$-1/12\leqslant\{\psi_4-\psi_5/6+1/2\}^+-1/2<1/12.$$

Возьмем другое разбиение на бруски с длинами ребер (1/5, 1/15, 1/6, 1/2), реализуемое процедурой (9) в следующем порядке: $l_1=2$, $l_2=4$, $l_3=3$, $l_4=1$. Для данного разбиения процедура (10) приобретает вид

$$n_5=r_2+15(r_4+2(r_3+6r_1)),$$

где

$$r_2=u_2=15\{[15\hat{b}_5^{(2)}+1/2]^+/15\}^+,\quad \hat{b}_5^{(2)}=\{\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_5/15\}^+,$$
$$r_4=u_4=2\{[2\hat{b}_4^{(4)}+1/2]^+/2\}^+,\quad \hat{b}_4^{(4)}=\{\hat{\varphi}_4-(\hat{\varphi}_5+r_2)/6\}^+,$$
$$r_3=u_3=6\{[6\hat{b}_3^{(3)}+1/2]^+/6\}^+,\quad \hat{b}_3^{(3)}=\{\hat{\varphi}_3-5(\hat{\varphi}_5+r_2)/36-25r_4/12\}^+,$$
$$r_1=u_1=5\{[5\hat{b}_2^{(1)}+1/2]^+/5\}^+,\quad \hat{b}_2^{(1)}=\{\hat{\varphi}_1-8(\hat{\varphi}_5+r_2)/75-8(r_4+2r_3)/5\}^+$$

имеет интервал однозначности x_m, равный [0, 2), и другие условия безошибочного решения задачи, зависящие от длин ребер брусков.

В заключение отметим, что несоответствие исходного интервала восстанавливаемой величины x'_m с интервалом параметра x_m, определенного с помощью процедуры (10), устраняется преобразованием

$$\hat{\varphi}_i=\{\hat{\varphi}'_i+\Delta\}^+,\quad x'_m=x_m-\Delta,$$

где $\Delta=x_m-x'_m=a-a'=b-b'$ — величина сдвига интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И.** О разрешении неоднозначности циклических измерений.— «Автометрия», 1972, № 4, с. 69.
2. **Собцов Н. В.** Оценка максимального правдоподобия многошкальной измерительной системы.— «Радиотехника и электроника», 1972, т. 17, № 10, с. 2076.
3. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Ч. II. М., «Сов. радио», 1968.
4. **Бухштаб А. А.** Теория чисел. М., «Просвещение», 1966.

Поступила в редакцию 15 ноября 1977 г.

УДК 621.317.080

В. В. ПИЦЫК, Н. И. ХОМЕНКО

(Москва)

ОДНОШКАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСКРЫТИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В ФАЗОВЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Противоречие между точностью и однозначностью фазовых измерений разрешается в навигации на основе многошкальных методов отсчета с использованием нескольких масштабных частот [1].

В настоящей работе предпринята попытка алгоритмического подхода к раскрытию неоднозначности измерений в фазовых навигационных системах, работающих на одной масштабной частоте.

Пусть положение объекта в $\mathcal{E}$-области q-мерного евклидова пространства характеризуется множеством $\boldsymbol{X}$ векторов $\boldsymbol{X}_i$, $i=\overline{1, n}$, вещественные компоненты которых $\{x_{i\upsilon}\}$, $\upsilon=\overline{1, q}$, являются фазовыми коор-