АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1978

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 621.317

Ю. Д. ПОПОВ
(Киев)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА ДЛЯ АЛФАВИТНОЙ СХЕМЫ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений

$$z=(k_1+\varphi_1)/d_1=\ldots=(k_m+\varphi_m)/d_m, \tag{1}$$

где z — восстанавливаемая величина; $k_i=[d_iz]^+$, $\varphi_i=\{d_iz\}^+$ — соответственно целая и дробная части от d_iz; $\varphi_i=\{\widehat{\varphi}_i-\psi_i\}^+$, ψ_i — ошибка измерения i-й дробной части; d_i — масштабный коэффициент i-й шкалы. Задача оценки параметра k_m по измеренным значениям дробных частей $\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_m$ лежит в основе проблемы устранения неоднозначности циклических (многошкальных) измерений. В статье [1], из которой заимствуются терминология и обозначения, предложен эффективный метод (назовем его алфавитным) решения указанной проблемы. В настоящей работе на основе этого метода получено оптимальное (в некотором смысле) решающее правило, с помощью которого оценивается параметр k_m.

Не ограничивая существенно общности рассуждений, предположим, что $m=3$, случайные величины ψ_1 и ψ_2 независимы и распределены по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma)$, $\psi_3\equiv 0$, d_1, d_2, d_3 — целые числа, расположенные в возрастающем порядке, d_3 — фиксированное простое число. Из результатов работы [1] следует, что в этом случае вероятность правильной оценки параметра k_3 равна

$$P\{\widehat{k}_3=k_3\}=\iint\limits_{B^{(k_3)}} g\left(\left\{x-a_3^{(1)}(k_3)+\frac{1}{2}\right\}^+ -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2},\ \left\{y-a_3^{(2)}(k_3)+\frac{1}{2}\right\}^+-\frac{1}{2}\right)dxdy, \tag{2}$$

где

$$g(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u^2+v^2)\right\}; \tag{3}$$

$a_3^{(i)}(k_3)=\left\{\frac{d_i}{d_3}k_3\right\}^+$, $i=1, 2$, — координаты точек (обозначим их через $a(k_3)$), образующих алфавит A_3 и соответствующих одному из значений параметра $k_3=\overline{0,\ d_3-1}$; $B^{(k_3)}$ — область, в которой подынтегральная функция $g(\cdot\ ,\ \cdot)$ в выражении (2) принимает при соответствующем k_3 значения, большие, чем при других величинах k_3.

Наша задача состоит в выборе d_1 и d_2, максимизирующих вероятность $P\{\widehat{k}_3=k_3\}$. С этой целью преобразуем (2) к более удобному для анализа виду.

Дополним единичный квадрат θ_2, лежащий в 1-й координатной четверти, с алфавитом A_3, содержащимся в нем, аналогичными квадратами, перенесенными параллельно во 2-, 3- и 4-ю четверти. Полученный таким образом расширенный квадрат обозначим $\overline{\theta}_2$, а расширенный алфавит — $\overline{A}_3$ (его точки $\overline{a}(k_3)$ могут совпадать с точками $a(k_3)$).

В [1] доказано, что при некоторых предположениях, выполненных здесь, вероятность $P\{\widehat{k}_3=k_3\}$ не зависит от выбора значения k_3. В силу этого можно положить $k_3=0$. Данному значению параметра при любом наборе d_1, d_2, d_3 соответствует точка алфавита, совпадающая с началом координат. В свою очередь, этой точке соответствует в квадрате θ_2 область $B^{(0)}$, состоящая из четырех частей, лежащих в углах данного квадрата. В квадрате $\overline{\theta}_2$ вместо $B^{(0)}$ можно рассматривать связную область $\overline{B}^{(0)}$, лежащую в окрестности точки $O(0, 0)$. В этом случае упрощается также и подынтегральная функция в выражении (2). Она принимает вид $g(x, y)$ и не зависит от параметров d_1, d_2, d_3.

Заметим теперь, что алфавит A_3 в силу теоремы 2 [1] инвариантен относительно преобразования параметров d_i вида

$$\left\{\frac{d_i^*}{d_3^*}\right\}^+=\left\{\frac{d_it}{d_3}\right\}^+,\quad i=1,2,\quad d_3^*=d_3,\quad t=2,\ldots,d_3-1,$$

или в эквивалентной форме

$$d_it\equiv d_i^*\ (\mathrm{mod}\ d_3). \tag{4}$$

Данное преобразование меняет лишь соответствие точек алфавита значениям параметра k_3, но так как при вычислении вероятности (2) используются лишь точки алфавита, а не указанное соответствие, то вероятность $P\{\widehat{k}_3=k_3\}$ также инвариантна относительно преобразования (4). Используя его, перейдем от набора параметров d_1, d_2, d_3 к набору 1, d_2^*, d_3^* с помощью алгоритма, приведенного в [2] (далее параметры d_2^* и d_3^* будут записываться без звездочек).

Укажем простые леммы, устанавливающие дополнительные свойства инвариантности алфавитов и полезные при дальнейшем изложении.

Лемма 1. Пусть алфавитам A_3' и A_3'' отвечают наборы шкал (1, d_2', d_3) и (1, d_2'', d_3) и пусть также $d_2'+d_2''=d_3$. Тогда A_3' и A_3'' эквивалентны с точностью до поворота θ_2 относительно оси $a_3^{(2)}=\frac{1}{2}$ на 180°.

Доказательство. По определению координаты точек алфавита равны $a_3^{(i)}(k)=\left\{\frac{d_i}{d_3}k\right\}^+$, $i=1,\ 2,\ k=\overline{0,\ d_3-1}$. Очевидно, что $a_3^{(1)'}(k)=a_3^{(1)''}(k)$. Далее

$$a_3^{(2)'}(k)=\left\{\frac{d_2'}{d_3}k\right\}^+=\left\{\frac{d_3-d_2''}{d_3}k\right\}^+=\left\{-\frac{d_2''}{d_3}k\right\}^+=$$

$$=1-\left\{\frac{d_2''}{d_3}k\right\}^+=1-a_3^{(2)''}(k),$$

что и доказывает лемму.

Заметим, что приведенное утверждение позволяет ограничиться анализом изменения d_2 в области 2, ..., $(d_3-1)/2$, d_3-1.

Лемма 2. Если $d_2'd_2''\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d_3)$, то алфавиты A_3' и A_3'' симметричны относительно биссектрисы 1-го координатного угла. Если $d_2'd_2''\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ d_3)$, то алфавиты A_3' и A_3'' «ортогональны» (повернуты один относительно другого на 90° вокруг центра квадрата θ_2).

Доказательство ради краткости проведем лишь для случая $d_2'd_2''=$ $=d_3+1$. Очевидны следующие соотношения:

$$a_3^{(1)'}(k)=\left\{\frac{1}{d_3}k\right\}^+=\left\{\frac{d_2''}{d_3}\frac{k}{d_2''}\right\}^+;$$

$$a_3^{(2)'}(k)=\left\{\frac{d_2'}{d_3}k\right\}^+=\left\{\frac{d_3+1}{d_2''d_3}k\right\}^+=\left\{\frac{k}{d_2''}+\frac{1}{d_3}\frac{k}{d_2''}\right\}^+.$$

Согласно теореме 2 [1], для точек алфавита A_3' в качестве значений k можно выбрать $0, d_2'', 2d_2'', \ldots, (d_3-1)d_2''$ (при этом мы получим все точки алфавита). Но в этом случае $\frac{k}{d_2''}=l$, где l — целое число, принимающее значения $0, 1, \ldots, d_3-1$ и

$$a_3^{(1)'}(k)=\left\{\frac{d_2''}{d_3}l\right\}^+=a_3^{(2)''}(l);$$

$$a_3^{(2)'}(k)=\left\{\frac{1}{d_3}l\right\}^+=a_3^{(1)''}(l),$$

что и требовалось доказать.

Опишем теперь точно область $\overline{B}^{(0)}$, по которой производится интегрирование функции $g(x, y)$ с целью максимизации вероятности $P\{\widehat{k}_3=$ $=k_3, k_3=0\}$ в зависимости от d_2.

Прежде всего укажем простой графический способ получения алфавита A_3, отвечающего набору шкал $1, d_2, d_3$ (рис. 1). Соединим точки с координатами $(0, -(d_2-1))$ и $(1, 1)$ отрезком прямой и разделим его на d_3 равных частей. Куски отрезка, расположенные между прямыми $y=-l$ и $y=-(l-1)$ $(l=\overline{1, d_2-1})$, с лежащими на них точками деления, перенесем в направлении оси Oy в квадрат θ_2. Перенесенные таким образом точки деления и будут составлять алфавит A_3. Нетрудно видеть, что они лежат на d_2 параллельных прямых, первая из которых проходит через точку $O(0, 0)$ и имеет угловой коэффициент, равный d_2. В общем случае уравнения указанных прямых имеют вид

$$y=d_2x-(i-1),\quad i=\overline{1, d_2},\qquad (5)$$

причем расстояния между соседними точками алфавита, лежащими на них, равны $d_3^{-1}\sqrt{d_2^2+1}$.

Опишем теперь процедуру нахождения точек расширенного алфавита $\overline{A}_3$, участвующих в образовании области $\overline{B}^{(0)}$ (рис. 2, *а*). Рассмотрим прямую $y=d_2x-1$, которая из описанного выше семейства прямых (5) находится на кратчайшем расстоянии от точки $O(0, 0)$ и не проходит через нее. На этой прямой выберем точки $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(k+1)$, ближайшие к началу координат. Нетрудно видеть, что при этом

$$k=\left[\frac{d_2d_3}{d_2^2+1}\right]^+\qquad (6)$$

и точки $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(k+1)$ имеют координаты $x_k=$ $=k/d_3$, $y_k=d_2x_k-1$ и $x_{k+1}=(k+1)/d_3$, $y_{k+1}=$

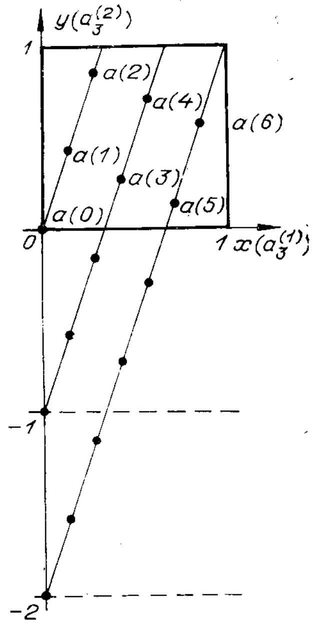

Рис. 1. Графический способ получения алфавита $A_3(d_1=$ $=1;\ d_2=3;\ d_3=7)$.

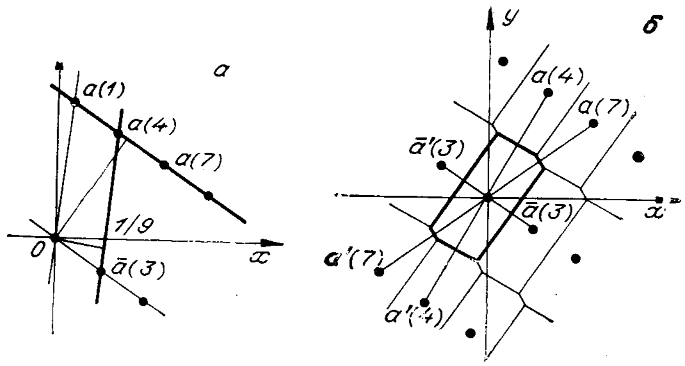

Рис. 2. Геометрическое представление решающей схемы, использующей расширенный алфавит:

а — нахождение точек расширенного алфавита $\bar{A}_3$, участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$; *б* — построение области $\bar{B}^{(0)}$ ($d_1=1$; $d_2=9$; $d_3=29$).

$=d_2x_{k+1}-1$ соответственно (новые обозначения x_k, y_k аналогичны старым — $a_3^{(1)}(k)$, $a_3^{(2)}(k)$).

Рассмотрим теперь второе семейство параллельных прямых, одна из которых проходит через начало координат и выделенную ранее точку $\bar{a}(k)$. Их уравнения имеют вид

$$y=(d_2k-d_3)x/k+(j-1)/k,\quad j=1,\ 2,\ \ldots, \tag{7}$$

где, как и ранее, k определяется соотношением (6).

Возьмем ту из прямых семейства (7), которая ближе всего к точке $O(0,\ 0)$, но не проходит через нее. Очевидно, уравнение этой прямой имеет вид

$$y=(d_2k-d_3)x/k+1/k \tag{8}$$

и на ней лежат точки $\bar{a}(1)$, $\bar{a}(k+1)$, $\bar{a}(2k+1)$ и т. д. На указанной прямой определим точки $\bar{a}((r-1)k+1)$ и $\bar{a}(rk+1)$, ближайшие к началу координат. При этом, как нетрудно показать,

$$r=\left[\frac{d_2(d_3-d_2k)-k}{(d_3-d_2k)^2+k^2}\right]^{+}+1 \tag{9}$$

и абсциссы точек $\bar{a}((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ равны $((r-1)k+1)/d_3$, $(rk+1)/d_3$ соответственно, а их ординаты определяются уравнением (8).

Процедура нахождения точек расширенного алфавита $\bar{A}_3$, участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$, закончена. Эти точки суть: O, $\bar{a}(k)$, $\bar{a}((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ (k и r определяются соотношениями (6) и (9)) и симметричные трем последним относительно начала координат точки $\bar{a}'(k)$, $\bar{a}'((r-1)k+1)$, $\bar{a}'(rk+1)$ (см. рис. 2, *б*).

Легко видеть теперь, что область $\bar{B}^{(0)}$ задается неравенствами

$$g(x,\ y)\geqslant g\left(\left\{x-x_{k_3}+\frac{1}{2}\right\}^{+}-\frac{1}{2},\ \left\{y-y_{k_3}+\frac{1}{2}\right\}^{+}-\frac{1}{2}\right),$$

где x_{k_3}, y_{k_3} — координаты точек $\bar{a}(k)$, $\bar{a}((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ и симметричных им. Из метода построения указанных точек следует также, что любые другие точки алфавита $\bar{A}_3$ не будут влиять на $\bar{B}^{(0)}$. Если функция $g(x,\ y)$ имеет вид (3), то геометрически область $\bar{B}^{(0)}$ представляет собой шестиугольник, образованный перпендикулярами, проведенными к серединам отрезков $O\bar{a}(k)$, $O\bar{a}((r-1)k+1)$, $O\bar{a}(rk+1)$, $O\bar{a}'(k)$, $O\bar{a}'((r-1)k+1)$, $O\bar{a}'(rk+1)$. Заметим, что фигура $\bar{B}^{(0)}$ центрально-симметрична относительно начала координат, любые две ее противоположные стороны служат таковыми же сторонами прямоугольника

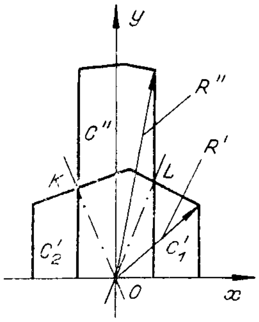

Рис. 3. Сравнение областей $\overline{B}_{R'}^{(0)}$ и $\overline{B}_{R''}^{(0)}$ решающих схем, соответствующих различным d_2 (R' отвечает набору шкал 1, 5, 29; R'' — 1, 14, 29).

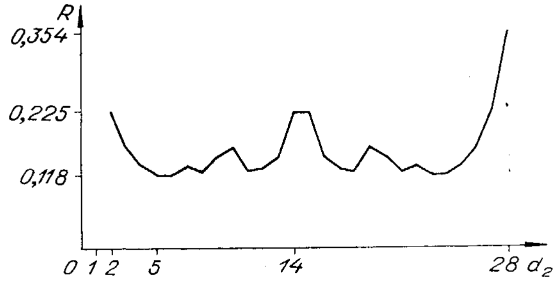

Рис. 4. Зависимость радиуса R области $\overline{B}^{(0)}$ от изменения шкалы $d_2(d_1=1;\ d_3=29)$.

и, кроме того, площадь $\overline{B}^{(0)}$ при любом d_2 постоянна и равна $1/d_3$. Нетрудно показать также, что для всякого d_2 полученный шестиугольник можно вписать в круг, радиус R которого назовем радиусом шестиугольника. Этот радиус равен радиусу окружности, описанной вокруг точек O, $\bar{a}(k)$, $\bar{a}(rk+1)$. Последние замечания и полученные ранее выражения для координат точек $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(rk+1)$ позволяют без труда вычислить

$$R=\frac{1}{2d_3^2}\sqrt{(k^2+(d_2k-d_3)^2)((rk+1)^2+(r(d_2k-d_3)+d_2)^2)(((r-1)k+1)^2+((r-1)(d_2k-d_3)+d_2)^2)},$$

где k и r определяются соотношениями (6) и (9).

Итак, вероятность правильного восстановления параметра k_3 дается формулой

$$P_{d_2}\{\hat{k}_3=k_3,\ k_3=0\}=\iint\limits_{\overline{B}^{(0)}} g(x,y)\,dxdy, \tag{10}$$

где $g(x, y)$ определяется соотношением (3), а $\overline{B}^{(0)}$ обладает только что описанными свойствами.

Следующее утверждение позволяет существенно упростить отыскание значения d_2, максимизирующего вероятность (10).

Теорема. Вероятность правильного восстановления параметра k_3, задаваемая формулой (10), является монотонно убывающей функцией радиуса R области $\overline{B}^{(0)}$.

Доказательство. Рассмотрим половины областей $\overline{B}_{R'}^{(0)}$ и $\overline{B}_{R''}^{(0)}$, соответствующих радиусам R' и R'', причем $R'<R''$ (рис. 3); нетрудно видеть, что $\overline{B}_{R'}^{(0)}$ и $\overline{B}_{R''}^{(0)}$ можно рассматривать именно в таком повернутом состоянии. Ясно, что площадь $C_1'+$ площадь $C_2'=$ площади C''. Отобразив C_1' симметрично относительно OL и C_2' — относительно OK, заметим, что эти области лежат «ближе» к началу координат, чем область C''. Отсюда, принимая во внимание вид подынтегральной функции $g(x, y)$, получаем требуемое.

Замечание. График функции R $(P\{\hat{k}_3=k_3\})$ от d_2 обладает симметрией в смысле леммы 1: при $d_2'+d_2''=d_3$ $R_{d_2'}=R_{d_2''}\left(P_{d_2'}\{\hat{k}_3=k_3\}=\right.$ $\left.=P_{d_2''}\{\hat{k}_3=k_3\}\right)$. Другие значения d_2' и d_2'', при которых выполняются последние равенства, даются леммой 2.

Пример. Пусть $d_3=29$. Выбирая вначале $d_1=1$, получим зависимость радиуса R области $\overline{B}^{(0)}$ решающей схемы рассматриваемого алфавитного метода от изменения шкалы d_2 (рис. 4). Интересно заметить, что наибольших значений R достигает на концах области определения $d_2=\overline{2,\ d_3-1}$. Следующий по величине (локальный) максимум находится в середине интервала изменения d_2, еще меньшие — вблизи точек $d_3/3$ и $2d_3/3$ и т. д. Наименьшего значения R достигает в точках d_2, равных 5, 6, 23, 24. Согласно доказанной теореме, при этом вероятность $P_{d_2}\{\hat{k}_3=k_3\}$ правильного восстановления параметра k_3 максимальна. Таким образом, в рассматриваемом примере оптимальным набором шкал является, например, тройка чисел 1, 5, 29. В силу изложенного ранее оптимальными являются также наборы шкал, полученные из указанного с помощью преобразования (4), например, 9, 16, 29; 10, 21, 29 и другие.

Для оптимальных наборов шкал вероятность правильного восстановления параметра k_3 при $\sigma=0{,}04$ равна 0,96, в то время как для набора 1, 14, 29 она составляет 0,68.

Есть основания предполагать, что минимум R достигается при значении d_2, лежащем вблизи $\sqrt{d_3}$. Однако установить этот факт аналитически не удалось ввиду весьма сложной зависимости R от d_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И.** О разрешении неоднозначности циклических измерений.— «Автометрия», 1972, № 4, с. 63—68.
2. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
17 августа 1977 г.

УДК 621.396.969.11

Г. И. СКРЫПНИК

(Москва)

О РЕКУРРЕНТНОЙ ПРОЦЕДУРЕ РАСКРЫТИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная задача обработки информации в радиоинтерферометрических системах определения координат объекта состоит в нахождении однозначной оценки определяемого параметра (дальности или направляющего косинуса) по результатам неоднозначных измерений дробных частей фазы в шкалах, различающихся значениями масштабных коэффициентов [1, 2]. Априорные сведения о многошкальной системе представлены в виде неполной линейной системы целочисленных уравнений

$$x=(k_1+\varphi_1)/d_1=\ldots=(k_i+\varphi_i)/d_i=\ldots=(k_m+\varphi_m)/d_m, \qquad (1)$$

где x — определяемый параметр, принимающий значение из интервала $[a,\ b)$; $k_i=[d_ix]^+$ и $\varphi_i=\{d_ix\}^+$ — соответственно целая и дробная части фазы $\Phi_i=d_ix$; d_i — масштабный коэффициент i-й шкалы; $d_m\ (d_m>d_l,\ l\neq m)$ — внешний масштаб системы; m — число шкал. Наблюдаемые значения дробных частей фазы $\hat{\varphi}_i=\{\varphi_i+\psi_i\}^+$ в общем случае содержат случайные ошибки измерений

$$\psi_i=\{\hat{\varphi}_i-\varphi_i+1/2\}^+-1/2, \quad i=\overline{1,\ m}, \qquad (2)$$