элементов. Таким образом, сложность декодирования $L_2(n, \tilde{\varphi}_1)$ удовлетворяет неравенству $L_2(n, \tilde{\varphi}_1) \leqslant n^2 \log^{3(1+\varepsilon'_n)} n \quad (\varepsilon'_n \to 0, n \to \infty)$.

2. Пусть появление очередной буквы, порождаемой источником, зависит от s предыдущих, т. е. рассмотрим марковский источник связности s, $s>1$, порождающий бесконечную последовательность букв алфавита $\{a_1, \ldots, a_k\}$, $k>2$. Как известно [9], заменой входного алфавита любой марковский источник связности $s>1$ сводится к марковскому источнику связности $s=1$. Поэтому будем считать, что $s=1$. С другой стороны, в соответствии с результатами [4] кодирование произвольного слова u длины n, порождаемого марковским источником с k входными буквами, сводится к кодированию не более $(k-1)$ слов, суммарная длина которых не превосходит n, в алфавите из двух букв. Поэтому кодирование сводится к кодированию, изученному в предыдущем пункте, и требует затраты не более $c_5 n^2 \log^{3(1+\varepsilon_n)} n$ элементов на кодирование и не более $c_6 n^2 \log^{3(1+\varepsilon'_n)} n$ элементов на декодирование $(\varepsilon_n \to 0, \varepsilon'_n \to 0, n \to \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кричевский Р. Е.** Лекции по теории информации. Новосибирск, изд. НГУ, 1970.
2. **Штарьков Ю. М.** Кодирование сообщений конечной длины на выходе источника с неизвестной статистикой.— В кн.: V конференция по теории кодирования и передачи информации. Т. 1. Теория информации. Москва — Горький, 1972, с. 147—152.
3. **Трофимов В. К.** Избыточность универсального кодирования произвольных марковских источников.— «Проблемы передачи информации», 1974, т. 10, № 4, с. 16—24.
4. **Бабкин В. Ф.** Метод универсального кодирования независимых сообщений неэкспоненциальной трудоемкости.— «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, № 4, с. 13—21.
5. **Бабкин В. Ф., Штарьков Ю. М.** Нумерация последовательностей с заданным числом переходов.— В кн.: Кодирование в сложных системах. М., «Наука», 1974, с. 175—180.
6. **Cover T. M.** Enumerative source encoding.— "IEEE Trans. on Inform. Theory", 1973, vol. IT 19, N 1, p. 73—77.
7. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. М., «Мир», 1977.
8. **Лупанов О. Б.** Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.— В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 14. М., «Наука», 1965, с. 31—110.
9. **Романовский В. И.** Дискретные цепи Маркова. М., Гостехиздат, 1949.

Поступило в редакцию 6 декабря 1977 г.

УДК 62—501.22 : 534

В. Т. ЛЯПУНОВ

(Ленинград)

К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В ряде работ показаны возможности и преимущества анализа спектров мощности и взаимных спектров временных рядов, минуя стадию расчета функции взаимной корреляции путем осреднения произведений спектров амплитуд [1—3]. В этих работах используются следующие оценки:

а) для взаимного спектра

$$S_{12}(f) = \frac{1}{Np} \sum_{j=1}^{p} Z_{1j}(f) Z^*_{2j}(f), \tag{1}$$

где

$$Z_{nj}(f) = \sum_{t=1}^{N} e^{-i2\pi tf} z_{nj}(t)\, w(t) \tag{2}$$

— оценки комплексных спектров амплитуд временных рядов $z_{nj}(t)$, * означает комплексно-сопряженную величину; f — частота $(f=l/N)$; $w(t)$ — весовая функция для временного ряда $z_{nj}(t)$;

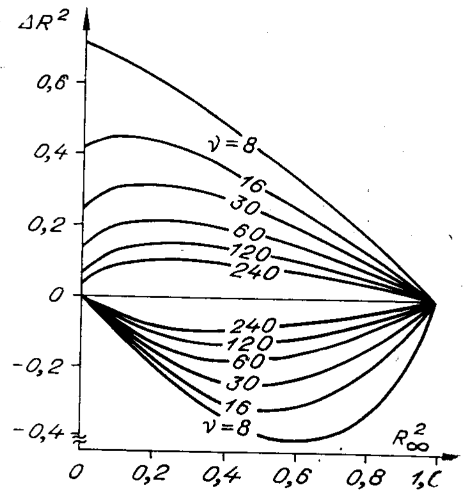

Рис. 1.

б) для коэффициента когерентности

$$R^2(f) = |S_{12}|^2/(S_{11}S_{22}); \tag{3}$$

в) для спектра фаз

$$\Phi(f) = \operatorname{arctg}\,[\operatorname{Im}\,(S_{12})/\operatorname{Re}(S_{12})]. \tag{4}$$

Формулы (1) — (4) осуществляют осреднение взаимных периодограмм по p реализациям длиной N чисел каждая.

Для двух идентичных временных рядов $z_{1j}(t) = z_{2j}(t)$ выражение (1) дает оценку спектральной плотности мощности, при этом коэффициенты когерентности $R^2(f) \equiv 1$, а фаза $\Phi(f) \equiv 0$. Статистические свойства такой оценки спектра мощности для случайных временных рядов $z(t)$, имеющих нормальное распределение, известны. Оценка (1) является асимптотически несмещенной, а ее состоятельность определяется убыванием дисперсии при увеличении числа осредненных реализаций p обратно пропорционально величине ΔfT, где Δf — ширина полосы эквивалентных фильтров анализатора, T — время наблюдения процесса.

При анализе взаимных спектров определение дисперсии оценки (1) значительно усложняется. Расчеты доверительных интервалов для когерентности и фазы основаны на свойствах χ^2-распределения, которому удовлетворяют периодограммы нормального случайного процесса [4]. При этом предполагается, что для принятой спектральной оценки число степеней свободы распределения известно. Тогда можно воспользоваться результатами работы [1], приведенными в виде графиков на рис. 1, где 95%-ные доверительные интервалы оценки коэффициента когерентности (3) представлены в зависимости от его истинного (вероятностного) значения при различном числе степеней свободы ν оценок спектров мощности. Таким образом, для определения качества оценки взаимных спектров достаточно знать число степеней свободы аналогичной оценки спектра мощности одного из анализируемых случайных процессов. Однако число степеней свободы зависит не только от типа случайного процесса, но также и от вида спектральной оценки. Так, оценка по формуле (1), называемая линейно-сглаженной периодограммой, при использовании одной реализации дает в результате анализа нормального процесса лишь две степени свободы, даже если с помощью весовой функции $w(t)$ ширина полосы фильтра будет значительно расширена. Для увеличения числа степеней свободы и соответственно уменьшения дисперсии оценки применяют осреднение по ансамблю реализаций. На практике применяют осреднение (сглаживание) не только по ансамблю реализаций, но и по частоте:

$$\hat{S}_{nj}(f) = d \sum_{l=1}^{N} S_{nj}(f-l)\,V(l), \tag{5}$$

где d — нормирующий множитель, $V(l)$ — весовая функция частотного сглаживания. Обычно функция $V(l)$ является симметричной с максимумом, равным единице при нулевом значении аргумента, и стремится к нулю при $m \to N/2$. В отличие от весовой функции $w(t)$, применяемой непосредственно к самому случайному процессу $z(t)$ и приводящей к «линейному» сглаживанию, функция $V(l)$ сглаживает энергетические спектральные характеристики процесса. Такое сглаживание принято называть «квадратичным» [2]. Поскольку при получении спектральных ординат (1) использовалось «линейное» сглаживание, оценка типа (5) представляет одновременное применение «линейного» и «квадратичного» сглаживания. Расчет числа степеней свободы для обоих видов сглаживания порознь выполнен в работе [2], а случай их совместного применения не изучен.

Рассмотрим дисперсию и эквивалентное число степеней свободы для сглаженной спектральной оценки типа (5) на примере спектра мощности нормального случайного процесса. Линейно-сглаженную оценку вида (1) обозначим индексом л, квадратично-сглаженную оценку — индексом к, а оценку (5) — индексом с. Будем рассматривать лишь одну реализацию, так как общее число степеней свободы пропорционально количеству линейно-независимых реализаций.

Для одной реализации оценку (1) можем переписать в виде

$$\hat{S}_{\text{л}}(k) = \frac{1}{N}\left[\left|\sum_{l=1}^{N} X(k-l)\,W(l)\right|^2 + \left|\sum_{l=1}^{N} Y(k-l)\,W(l)\right|^2\right], \tag{6}$$

где

$$W(l)=\sum_{t=1}^{N}W(t)\,e^{-2\pi i l t/N}\qquad(7)$$

— линейное спектральное «окно», а $X(k)$ и $Y(k)$ — соответственно вещественная и мнимая части спектральной амплитуды временного ряда $z(t)$, т. е. преобразования типа (7) от самого процесса. Для нормального случайного процесса $z(t)$ с нулевым математическим ожиданием спектральные амплитуды $X(k)$ и $Y(k)$ являются некоррелированными случайными величинами, распределенными по нормальному закону с математическими ожиданиями, равными нулю, и равными между собой дисперсиями $D\{X(k)\}=D\{Y(k)\}=\overline{z^2}/2N$ $(k=\overline{1,N})$.

Оценку, основанную на смешанном сглаживании (5), перепишем в виде

$$\widehat{S}_{\text{с}}(k)=\sum_{m}\widehat{S}_{\text{л}}(k-m)\,V(m).\qquad(8)$$

Ее математическое ожидание

$$E\left\{\widehat{S}_{\text{с}}(k)\right\}=\sum_{m}V(m)\,E\left\{\widehat{S}_{\text{л}}(k-m)\right\}=\frac{2E(z^2)}{N}\sum_{p}W^2(p)\sum_{m}V(m).\qquad(9)$$

Найдем теперь дисперсию смешанной оценки

$$D\left\{\widehat{S}_{\text{с}}(k)\right\}=E\left\{\widehat{S}^2_{\text{с}}(k)\right\}-E^2\left\{\widehat{S}_{\text{с}}(k)\right\}.\qquad(10)$$

Выполняя ряд преобразований, аналогичных [2], получим

$$D\left\{\widehat{S}_{\text{с}}(k)\right\}=\frac{4E^2(z^2)}{N^2}\sum_{m}\sum_{n}V(m)\,V(n)\sum_{p}\sum_{q}W(p)\,W(q)\;W(p+m+n)\;W(q+m-n).\qquad(11)$$

Из формул (9) и (11) можем найти эквивалентное число степеней свободы смешанной оценки типа (5) или (8):

$$\nu_{\text{с}}=\frac{2E^2\left\{\widehat{S}_{\text{с}}(k)\right\}}{D\left\{\widehat{S}_{\text{с}}(k)\right\}}=2\frac{\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}V(m)\,V(n)}{\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}V(m)\,V(n)\,\rho^2(m-n)},\qquad(12)$$

где $\rho(r)=\sum\limits_{p}W(p)\,W(p-r)\left[\sum\limits_{q}W^2(q)\right]^{-1}$ — функция корреляции линейно-сглаженных спектральных ординат. Очевидно, что $\rho(0)=1$, а при $0<r<N$ $\rho(r)\leqslant 1$. Следовательно, введение квадратичного сглаживания в комбинации с линейным приводит к увеличению числа степеней свободы. Как указывалось выше, линейное сглаживание не приводит к увеличению числа степеней свободы оценки спектра. Таким образом, смешанное (линейное и квадратичное) сглаживание позволяет не только подобрать необходимую частотную характеристику фильтра, но и обеспечить улучшение статистической стабильности оценки спектра.

Сопоставим увеличение числа степеней свободы с расширением полосы эквивалентного фильтра [5]. Определяя эффективную ширину полосы фильтра как отношение энергии процесса на выходе фильтра к спектральной плотности энергии на входе фильтра, для линейной, квадратичной и смешанной сглаженных оценок можем получить:

$$\Delta f_{\text{л}}=\frac{\sum\limits_{l}W^2(l)}{TW^2(0)};\quad \Delta f_{\text{к}}=\frac{\sum\limits_{l}V(l)}{TV(0)};\qquad(13)$$

$$\Delta f_{\text{с}}=\frac{\sum\limits_{m}V(m)\sum\limits_{l}W^2(l)}{T\sum\limits_{m}V(m)\,W^2(-m)}.\qquad(14)$$

С помощью (12) и (14) можно ввести критерий качества спектральной оценки, взяв отношение числа степеней свободы, обратно пропорционального дисперсии оценки, к ширине полосы фильтра. Перейдем к безразмерному отношению с помощью длительности реализации, приняв в качестве критерия величину $\varkappa=\nu/(T\Delta f)$. В общем случае смешанного сглаживания получим

$$\varkappa_{\text{с}}=\frac{2\sum\limits_{n}V(n)\sum\limits_{p}W^2(p)\sum\limits_{m}V(m)\,W^2(-m)}{\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}V(n)\,V(m)\left[\sum\limits_{p}W(p)\,W(p-m+n)\right]^2}.\qquad(15)$$

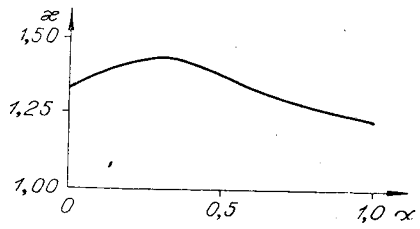

Рис. 2.

Формула (15) позволяет выбрать оптимальный вариант сглаживания в зависимости от поставленной задачи. Обычно желательна наименьшая ширина полосы фильтра при заданной допустимой дисперсии оценки, т. е. необходимо искать максимум величины $\varkappa$.

В качестве примера на рис. 2 приведена расчетная зависимость величины $\varkappa$ для смешанного сглаживания следующего вида:

1) весовая функция для процесса $w(t)=0{,}5\,[1+\cos(2\pi ft/N)]$;

2) соответствующее ей «линейное» спектральное «окно» $W(0)=1$; $W(\pm 1)=0{,}5$; $W(m\geqslant 2)=0$;

3) весовая функция «квадратичного» сглаживания по частоте $V(0)=1$; $V(\pm 1)=\alpha$; $V(m\geqslant 2)=0$, где α — величина, изменяющаяся в пределах от нуля до единицы. Случай $\alpha=0$ соответствует только линейному сглаживанию, а $\alpha=1$ — энергетическому осреднению трех соседних линейно-сглаженных спектральных ординат. Расчет показывает, что с изменением параметров смешанного сглаживания возможно достижение некоторого оптимального сглаживания в заданном классе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Haubrich R. A.** Earth noise, 5 to 500 millicycles per second.— "J. Geophys. Res.", 1965, vol. 70, N 6, p. 1415—1427.
2. **Tick L. J.** Estimation of coherency.— In: Spectral Analysis of time Series. Harris B., ed. N.-Y., 1967, p. 133—152.
3. **Sloane E. A.** Comparison of linearly and quadratically modified spectral estimates of gaussian signals.— "IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics", 1969, vol. AU-17, N 2, p. 133—137.
4. **Blackman R. B., Tukey J. W.** The measurement of power spectra from the point of view of communication engineering.— "Bell Syst. Techn. J.", 1958, N 1—2, p. 185—569.
5. **Харкевич А. А.** Спектры и анализ. М., ФМ, 1962.

Поступило в редакцию 29 апреля 1971 г.;
окончательный вариант — 12 апреля 1977 г.

УДК 621.378 : 681.332 : 535.317

В. В. АРИСТОВ, Г. А. БАЩКИНА, Ю. П. БОГЛАЕВ,
В. И. ГРИГОРЬЕВ, Р. Р. ПОНОМАРЕВА

(Москва)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ УЛУЧШЕНИИ ИСКАЖЕННЫХ СВЕРТКОЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПТИКО-ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Введение. Хорошо известно [1, с. 37], что если система, формирующая изображение, в ответ на входной импульсный сигнал $\delta(x-x_0,\ y-y_0)$ создает изображение с интенсивностью $h(x-x_0,\ y-y_0)$, то при предъявлении на вход такой системы сигнала $f(x,\ y)$ на выходе возникает изображение с интенсивностью $g(x,\ y)$, которая описывается уравнением свертки

$$g(x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x',y')\,h(x-x',\ y-y')\,dx'dy'. \qquad (1)$$

Такая ситуация встречается на практике при съемке расфокусированной или движущейся камерой, при съемке через турбулентную среду, при получении электронно-микроскопических изображений, при регистрации картин рентгеновской дифракции и в других случаях, и поэтому представляет большой интерес решение уравнения (1), т. е. восстановление по изображению — свертке $g(x,\ y)$ и ядру $h(x,\ y)$ — «идеального» изображения $f(x,\ y)$.

Задаче решения уравнения свертки в последнее время посвящено немало математических работ (см. библиографию в [2]). Ранняя идея решения состояла в делении