АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1978

КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА

УДК 681.3 : 519.2

Р. В. КАКУБАВА, И. С. МИКАДЗЕ

(Тбилиси)

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ПРИ ПРОГРАММНОМ И ПРОГРАММНО-АППАРАТУРНОМ КОНТРОЛЕ ОБНАРУЖЕНИЯ НЕИСПРАВНОСТИ

Нормальная реализация программ решения задач на вычислительной машине (ВМ) может прерываться из-за самоустраняющихся сбоев и устойчивых отказов в ее отдельных узлах и устройствах. Обнаружение этих отказов и сбоев, своевременное устранение их влияния на результаты решения задачи является весьма важной задачей проектирования и эксплуатации ВМ. Для обнаружения возможных отказов и сбоев в работе ВМ применяются следующие виды контроля: программный, аппаратурный, аппаратурно-программный. Каждый из этих видов контроля работоспособности устройств и узлов ВМ имеет свои достоинства и недостатки. Определение производительности ВМ при указанных видах обнаружения ее неисправности рассмотрено в работах [1—5] при двух типах отказов [6]. После первого типа отказа (сбоев) происходит пересчет только искаженной части программы, а после второго типа (устойчивых отказов) — восстановление ВМ и пересчет всей программы сначала. Учитывая, что аппаратурный контроль всегда связан с дополнительными затратами, его применение не всегда оправдано. Программный контроль удлиняет решение задачи, так как требует дополнительного времени для повторных просчетов и образования измененной программы, исключающей совпадение результатов расчета при устойчивых отказах, для установления достоверности результатов вычисления, для выяснения причин в случае несовпадения результатов повторных вычислений (виды неисправности устанавливаются соответствующим образом разработанным тестом для данной ВМ) и определения возможного пути продолжения решения задачи. Программный контроль во многих случаях может оказаться более предпочтительным, поэтому в данной работе рассматривается расчет вероятностной характеристики производительности двух моделей ВМ при программном и программно-аппаратурном контроле. Работа является продолжением исследований в этом направлении [1—5].

В условиях ожидаемых сбоев и отказов ВМ большое значение имеет оптимальная организация вычислительного процесса. С этой целью принята поэтапная работа программы решения задачи [1—5]. Потоки сбоев и отказов в обеих моделях ВМ принимаются пуассоновскими.

М о д е л ь 1. Сбой или отказ устанавливается по несовпадению результатов двух из трех последовательных реализаций одного и того же этапа задачи.

Пусть α и β — интенсивности соответственно сбоев и отказов. Случайная величина ξ — время решения задачи без отказов и сбоев — распределена по произвольному безгранично делимому закону $\Psi(t)$. Если $F(t)$ — распределение времени решения каждого этапа, то, очевидно, $\Psi(t)$ представляет n-кратную свертку $F(t)$ с самим собой. В конце каждого этапа теряется время θ для изменения порядка повторных вычислений, сравнения полученных результатов и проверки состояния машины.

Если при прохождении этапа произойдет отказ, то после завершения 3-кратного пересчета ВМ сразу передается на восстановление. Допустим, функция распределения θ есть $G_1(t)$, а функция распределения времени восстановления — $G_2(t)$. Решение поставленной задачи на ВМ рассматриваем как полумарковский процесс с конечным числом состояний [7]. Введем функции $\Phi_j(t)=P\{\eta_j<t\}$, $j=\overline{1,\ n+1}$. Эти функции распределения случайной величины η_j характеризуют реальное время решения задачи при условии, что решение начнется с j-го этапа при исправной ВМ. Очевидно, $\Phi_{n+1}(t)=1$. Событие $A_j=\{\eta_j<t\}$ подразделяется на частные случаи A_{jk}, $k=\overline{1,\ 5}$:

A_{j1} — событие, заключающееся в том, что j-й этап реализуется 3 раза и за это время не произойдет ни сбоя, ни отказа, а решение продолжается с $j+1$-го этапа;

A_{j2} — событие, состоящее в том, что на j-м этапе произойдет отказ; после завершения этапа и обнаружения отказа ВМ сразу передается на восстановление; после восстановления решение начнется с 1-го этапа;

A_{j3} — событие, заключающееся в том, что на j-м этапе не произойдет отказа, а сбой произойдет только в одном подэтапе; решение задачи продолжается с $j+1$-го этапа;

A_{j4} — событие, состоящее в том, что не произойдет отказа, а сбои произойдут в двух подэтапах; решение начнется с j-го этапа;

A_{j5} — событие, заключающееся в том, что на j-м этапе не произойдет отказа, а сбои произойдут во всех трех подэтапах. Решение начнется с j-го этапа.

Вероятности этих событий $\Phi_{jk}(t)$, $k=\overline{1,\ 5}$, имеют вид:

$$\Phi_{j1}(t)=\int_0^t dF_3^*(x)\,e^{-(\alpha+\beta)x}\int_0^{t-x} dG_1(y)\,\Phi_{j+1}(t-x-y);$$

$$\Phi_{j2}(t)=\int_0^t dF_3^*(x)[1-e^{-\beta x}]\,dx\int_0^{t-x} dG_1(y)\int_0^{t-x-y} dG_2(z)\,\Phi_1(t-x-y-z);$$

$$\Phi_{j3}(t)=3\int_0^t dF(x)\,(1-e^{-\alpha x})\,e^{-\beta x}\int_0^{t-x} dF_2^*(y)\,e^{-(\alpha+\beta)y}\times$$

$$\times\int_0^{t-x-y} dG_1(z)\,\Phi_{j+1}(t-x-y-z);$$

$$\Phi_{j4}(t)=3\int_0^t dF(x)\,(1-e^{-\alpha x})\,e^{-\beta x}\int_0^{t-x} dF(y)\,(1-e^{-\alpha y})\,e^{-\beta y}\times$$

$$\times\int_0^{t-x-y} dF(z)\,e^{-(\alpha+\beta)z}\int_0^{t-x-y-z} dG_1(u)\,\Phi_j(t-x-y-z-u);$$

$$\Phi_{j5}(t)=\int_0^t dF(x)\,(1-e^{-\alpha x})\,e^{-\beta x}\int_0^{t-x} dF(y)\,(1-e^{-\alpha y})\,e^{-\beta y}\times$$

$$\times\int_0^{t-x-y} dF(z)\,(1-e^{-\alpha z})\,e^{-\beta z}\int_0^{t-x-y-z} dG_1(u)\,\Phi_j(t-x-y-z-u),$$

где $F_i^*(x)$ — i-кратная свертка $F(x)$, а полные вероятности событий A_j имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_j(t) = \sum_{k=1}^{5} \Phi_{jk}(t); \\ \Phi_{n+1}(t) = 1; \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{1}$$

Применяя к системе (1) преобразования Лапласа — Стилтьеса и обозначая

$$\varphi_j(s) = \int_0^\infty e^{-st}\Phi_j(t)\,dt; \quad f(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t);$$

$$g_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_1(t); \quad g_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_2(t);$$

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\Psi(t)\,dt,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} a(s)\,\varphi_j(s) - b(s)\,\varphi_{j+1}(s) - c(s)\,\varphi_1(s) = 0; \\ \varphi_{n+1}(s) = \frac{1}{s}; \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$a(s) = 1 - 3g_1(s) f(p_2)\,[f(p_1) - f(p_2)]^2 - g_1(s)\,[f(p_1) - f(p_2)]^3;$$

$$b(s) = g_1(s) f^3(p_2) + 3g_1(s) f^2(p_2)\,[f(p_1) - f(p_2)];$$

$$c(s) = g_1(s)\, g_2(s)\,[f^3(s) - f^3(p_1)]; \quad p_1 = s + \beta; \quad p_2 = s + \alpha + \beta.$$

Так как $\Psi(t) = F_n^*(t)$, то, очевидно, $f(s) = \sqrt[n]{s\psi(s)}$. Из системы (2) находим

$$\varphi_1(s) = \frac{b^n(s)\,[a(s) - b(s)]}{s\,\{a^n(s)\,[a(s) - b(s)] + c(s)\,[b^n(s) - a^n(s)]\}}. \tag{3}$$

Для практических целей целесообразно от системы (2) перейти к средним значениям η_j, т. е. к $T_j = \int_0^\infty t\,d\Phi_j(t)$. Умножим (2) на s и, учитывая, что $|s\varphi_j(s)|'_{s=0} = -T_j$ и $|s\varphi_j(s)|_{s=0} = 1$, получим

$$a_0 T_j - b_0 T_{j+1} - c_0 T_1 = 0; \tag{4}$$

$$T_{n+1} = 0; \quad j = \overline{1, n},$$

где

$$a_0 = |a(s)|_{s=0}; \quad b_0 = |b(s)|_{s=0}; \quad c_0 = |c(s)|_{s=0};$$

$$d_0 = |a(s) - b(s) - c(s)|'_{s=0}.$$

Учитывая, что $a_0 - b_0 = c_0$, из (4) находим

$$T_1 = d_0\,(a_0^n - b_0^n)/(c_0 b_0^n). \tag{5}$$

Ясно, что $T_1 = T_1(n)$ является функцией n. Из уравнения $\frac{dT_1(n)}{dn} = 0$, если предположить, что $T_1(n)$ есть функция непрерывного параметра n, найдем такое значение $n = n_0$, при котором величина T_1 будет минимальной.

Модель 2. Сбои обнаруживаются методом двойной реализации каждого этапа задачи, а отказы — аппаратурными средствами в том же интервале времени, что и сбои. В отличие от модели 1 разрешаемая задача разбита на неодинаковые этапы с произвольным законом распределения времени их решения — $F_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, а интенсивности α_j и β_j, $j=\overline{1,n}$, сбоев и отказов соответственно зависят от решаемых этапов.

Аналогично предыдущей модели составляем систему интегральных уравнений:

$$\Phi_j(t) = \int_0^t e^{-(\alpha_j+\beta_j)x} dF_{j2}^*(x) \int_0^{t-x} dG_1(y)\,\Phi_{j+1}(t-x-y) +$$

$$+ \int_0^t dF_{j2}^*(x)\, e^{-\beta_j x}\left[1-e^{-\alpha_j x}\right] \int_0^{t-x} dG_1(y)\,\Phi_j(t-x-y) +$$

$$+ \int_0^t \beta_j e^{-\beta_j x}\left[1-F_{j2}^*(x)\right] dx \int_0^{t-x} dG_2(y)\,\Phi_1(t-x-y); \qquad (6)$$

$$\Phi_{n+1}(t) = 1; \quad j=\overline{1,n},$$

где $F_{j2}^*(x)$ — двукратная свертка функции распределения $F_j(x)$.

Применив к (6) преобразование Лапласа — Стилтьеса, получим

$$\begin{cases} a_j(s)\,\varphi_1(s) - b_j(s)\,\varphi_j(s) + c_j(s)\,\varphi_{j+1}(s) = 0; \\ \varphi_{n+1}(s) = \frac{1}{s}; \quad j=\overline{1,n}, \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$a_j(s) = \frac{g_2(s)\,\beta_j\left[1-f_j^2(p_{1j})\right]}{p_{1j}};$$

$$b_j(s) = 1 - g_1(s)\left[f_j^2(p_{1j}) - f_j^2(p_{2j})\right]; \qquad (8)$$

$$c_j = g_1(s)\,f_j^2(p_{2j}); \quad p_{1j} = s+\beta_j; \quad p_{2j} = s+\alpha_j+\beta_j.$$

Решение системы (7) относительно $\varphi_1(s)$ имеет вид

$$\varphi_1(s) = \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{c_i}{b_i}\right]\left[1-\sum_{m=1}^{n} a_m \prod_{i=1}^{m}\frac{c_{i-1}}{b_i}\right]^{-1}\frac{1}{s}; \quad c_0 = 1. \qquad (9)$$

Преобразуя систему (7) относительно средних значений времени решения задачи T_j, если ее решение начнется с j-го этапа, получим

$$\begin{cases} a_{j0}T_1 - b_{j0}T_j + c_{j0}T_{j+1} = d_{j0}; \\ T_{n+1} = 0; \quad j=\overline{1,n}, \end{cases} \qquad (10)$$

где a_{j0}, b_{j0}, c_{j0} определяются из (8), они равны a_j, b_j, c_j при $s=0$, а $d_{j0} = |a_j - b_j + c_j|'_{s=0}$.

Решая (10) относительно T_1, получим

$$T_1 = \frac{\sum_{m=1}^{n} d_{m0} \prod_{i=1}^{m} \frac{c_{i-1,0}}{b_{i0}}}{\left[\sum_{m=1}^{n} a_{m0} \prod_{i=1}^{m} \frac{c_{i-1,0}}{b_{i0}}\right] - 1}. \qquad (11)$$

Здесь принято, что $c_{00}=1$.

Рассмотрим частный случай модели 1:

$$\beta=0 \text{ и } \Psi(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant T;\\ 1, & t>T,\end{cases}$$

тогда

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant T/n;\\ 1, & t>T/n.\end{cases}$$

Преобразованием Лапласа — Стилтьеса $\Psi(t)$ являются e^{-sT}/s, $f(s)=e^{-sT/n}$.

Используя (5) и проведя все вышеуказанные преобразования, получим

$$T_1=\frac{(nT_\theta+3T)\,e^{\frac{3\alpha T}{n}}}{3e^{\frac{\alpha T}{n}}-2}.$$

Здесь T_θ означает среднее значение для θ. Если

$$T_\theta=0{,}2 \text{ ч}, \ \alpha=0{,}05 \text{ 1/ч}, \ T=40 \text{ ч},$$

имеем

$$T_1=(n+600)\,e^{6/n}/(15e^{2/n}-10).$$

При $n=1$ $T_1=2356$ ч, при $n=5$ $T_1=162$ ч и для $n>5$ значение T_1 очень медленно снижается до $T_1=126$ ч при $n=30$, а затем увеличивается. При $n=10$, $T_1=133$ ч и, имея в виду, что разбиение задачи на этапы требует дополнительных затрат, можно принять оптимальным значением число этапов в пределах $n=10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гаркави А. Л., Гоголевский В. Б., Грабовецкий В. П.** Надежность контролируемых восстанавливаемых устройств с временной избыточностью.— В кн.: Теория надежности и массовое обслуживание. М., «Наука», 1969.
2. **Микадзе И. С., Шелегия Р. С.** К вопросу осуществимости выполнения заданий на УВМ с учетом ее надежности.— «Сообщения АН ГССР», 1970, т. 60, № 3, с. 665.
3. **Микадзе И. С., Шелегия Р. С.** Некоторые вопросы определения производительности цифровых вычислительных машин.— «Сообщение АН ГССР», 1973, т. 70, № 1, с. 45.
4. **Микадзе И. С.** К вопросу определения производительности вычислительной машины, входящей в систему обработки данных.— «Сообщения АН ГССР», 1976, № 81, № 3, с. 673.
5. **Черкесов Г. Н.** Надежность технических систем с временной избыточностью. М., «Сов. радио», 1974.
6. **Беляев Ю. К.** Производительность при наличии двух типов отказов.— В кн.: Кибернетика на службе коммунизма. Т. 2. М.— Л., «Энергия», 1964.
7. **Королюк В. С.** Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний.— «УМЖ», 1965, № 3, с. 123.

Поступила в редакцию 21 июля 1976 г.;
окончательный вариант — 31 декабря 1976 г.