АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО СОВОКУПНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Постановка задачи. Система описывается уравнением

$$dx(t) = [f(\theta,\ t) + F(\theta,\ t)x(t)]dt + \Phi_1(\theta,\ t)dw_1(t), \tag{1}$$

где $x(t)$—n-мерный вектор состояния системы; f—n-мерная вектор-функция; F и Φ_1 — матрицы размерностей соответственно $(n \times n)$ и $(n \times r_1)$; $w_1(t)$ — стандартный винеровский процесс [1]. Предполагается, что параметр θ постоянный с возможными значениями из дискретного множества $\Xi = \{\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_r\}$, которые он может принимать с априорными вероятностями $p_0(\theta_k) = P\{\theta = \theta_k\}$, $0 \leqslant k \leqslant r$. Предполагается также, что распределение значений вектора состояния $x(t)$ системы (1) в начальный момент времени t_0 не зависит от значения θ и является нормальным с параметрами m_0 и Γ_0.

Имеется два канала наблюдения за состоянием системы (1). Непрерывный канал описывается уравнением

$$dz(t) = H(t)x(t)dt + \Phi_2(t)dw_2(t), \tag{2}$$

где $z(t)$—k-мерный вектор непрерывных измерений; H и Φ_2 — матрицы размерностей соответственно $(k \times n)$ и $(k \times r_2)$; $w_2(t)$—r_2-мерный стандартный винеровский процесс, независимый от $w_1(t)$. В дискретном канале в моменты времени $t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_m,\ \ldots$ измеряется последовательность $\eta(t_m)$ в соответствии с уравнением

$$\eta(t_m) = G(t_m)x(t_m) + \Phi_3(t_m)w_3(t_m). \tag{3}$$

Здесь $\eta(t_m)$—q-мерный вектор дискретных измерений; G и Φ_3 — матрицы размерностей соответственно $(q \times n)$ и $(q \times r_3)$; $w_3(t_m)$ — последовательность r_3-мерных гауссовых векторов, независимых от $w_1(t)$ и $w_2(t)$ с $M\{w_3(t_m)\} = 0$ и $M\{w_3(t_m)w_3^{\mathrm{T}}(t_m)\} = I$ (M — знак операции математического ожидания, т — знак операции транспонирования, I — единичная матрица). Стохастические дифференциальные уравнения (1), (2), а также стохастические уравнения, которые будут получены в дальнейшем, понимаются в смысле Ито [1]. Предполагается, что матрицы $R(t) = \Phi_2(t)\Phi_2^{\mathrm{T}}(t)$ и $N(t_m) = \Phi_3(t_m)\Phi_3^{\mathrm{T}}(t_m)$ не вырождены для всех $t \geqslant t_0$ и $t_m \geqslant t_0$.

Задача фильтрации. По совокупности непрерывных $z_0^t = \{z(s);\ t_0 \leqslant s \leqslant t\}$ и дискретных $\eta_0^m = \{\eta(t_0),\ \eta(t_1),\ \ldots,\ \eta(t_m);\ t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant t\}$ измерений найти функционал $\hat{x}_t[z_0^t, \eta_0^m]$, который бы определял оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $m(t)$ вектора состояния $x(t)$ системы (1) в момент времени t.

Задача интерполяции. По совокупности непрерывных z_0^t и дискретных η_0^m измерений найти функционал $\hat{x}_\tau[z_0^t, \eta_0^m]$, который бы определял оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $m(\tau, t)$ вектора состояния $x(\tau)$ системы (1) в момент времени τ, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Одновременное наличие непрерывного (2) и дискретного (3) каналов наблюдений за системой (1) (например, летательный аппарат или электромеханическое устройство) возникает в ситуации, когда вектор наблюдений $z(t)$ формируется из показаний датчиков системы (1), а вектор наблюдений $\eta(t_m)$ представляет собой совокупность измерений внешних источников (например, радиолокационные станции в случае летательного аппарата), работающих в импульсном режиме. По отношению к процессу $x(t)$ задача нахождения оценок $m(t)$ и $m(\tau, t)$ является задачей оценивания в условиях неполной статистической информации, или, иначе,— задачей адаптивного оценивания [2]. Решение задачи фильтрации в случае полной информации об объекте определяется, как известно, уравнениями Калмана — Бьюси [3—5]. При наличии неизвестного параметра θ и отсутствии дискретного канала наблюдений решение задачи фильтрации определяется адаптивным фильтром Калмана — Бьюси (например, [2]). При непрерывно-дискретных наблюдениях и полной информации об объекте задача фильтрации рассмотрена в [6], а задача прямой интерполяции (зависимость $m(\tau, t)$ от t при фиксированном τ) — в [7]. В данной работе задача интерполяции решается также на основе прямых уравнений. При этом используется метод, позволяющий одновременно решить как задачу прямой интерполяции, так и задачу фильтрации.

2. **Основные результаты.** Утверждение 1. Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка фильтрации $m(t)$ вектора состояния $x(t)$ системы (1) определяется формулой

$$m(t) = \sum_{k=0}^{r} p_t(\theta_k)\, m(t\,|\,\theta_k), \tag{4}$$

где $m(t|\theta_k)$ и апостериорные вероятности $p_t(\theta_k) = P\{\theta = \theta_k\,|\,z_0^t, \eta_0^m\}$ значений параметра θ определяются на полуинтервале $t_m \leqslant t < t_{m+1}$ для всех $\theta_k \in \Xi$ уравнениями:

$$d_t m(t|\theta_k) = [f(\theta_k, t) + F(\theta_k, t) m(t|\theta_k)]dt + \Gamma(t|\theta_k) H^{\mathrm{T}}(t) R^{-1}(t)[dz(t) - {} \\ - H(t) m(t|\theta_k) dt]; \tag{5}$$

$$\frac{d\Gamma(t\,|\,\theta_k)}{dt} = F(\theta_k, t)\Gamma(t\,|\,\theta_k) + \Gamma(t\,|\,\theta_k) F^{\mathrm{T}}(\theta_k, t) + Q(\theta_k, t) - {} \\ - \Gamma(t\,|\,\theta_k) H^{\mathrm{T}}(t) R^{-1}(t) H(t)\Gamma(t\,|\,\theta_k); \quad Q = \Phi_1\Phi_1^{\mathrm{T}}; \tag{6}$$

$$d_t p_t(\theta_k) = p_t(\theta_k)\left[dz(t) - H(t)\sum_{\alpha=0}^{r} p_t(\theta_\alpha)\, m(t\,|\,\theta_\alpha)\right]^{\mathrm{T}} \times \\ \times R^{-1}(t) H(t)\left[m(t\,|\,\theta_k) - \sum_{\alpha=0}^{r} p_t(\theta_\alpha)\, m(t\,|\,\theta_\alpha)\right] \tag{7}$$

с начальными условиями

$$m(t_m|\theta_k) = m(t_m-0|\theta_k) + \Gamma(t_m-0|\theta_k) G^{\mathrm{T}}(t_m)[N(t_m) + {} \\ + G(t_m)\Gamma(t_m-0|\theta_k) G^{\mathrm{T}}(t_m)]^{-1}[\eta(t_m) - G(t_m) m(t_m-0|\theta_k)]; \tag{8}$$

$$\Gamma(t_m|\theta_k) = \Gamma(t_m-0|\theta_k) - \Gamma(t_m-0|\theta_k) G^{\mathrm{T}}(t_m)[N(t_m) + {} \\ + G(t_m)\Gamma(t_m-0|\theta_k) G^{\mathrm{T}}(t_m)]^{-1} G(t_m)\Gamma(t_m-0|\theta_k); \tag{9}$$

$$p_{t_m}(\theta_k) = \left[\frac{|\Gamma(t_m\,|\,\theta_k)|}{|\Gamma(t_m-0\,|\,\theta_k)|}\right]^{1/2} \times \\ \times \frac{\exp\left\{\frac{1}{2} m^{\mathrm{T}}(t_m\,|\,\theta_k)\Gamma^{-1}(t_m\,|\,\theta_k) m(t_m\,|\,\theta_k)\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2} m^{\mathrm{T}}(t_m-0\,|\,\theta_k)\Gamma^{-1}(t_m-0\,|\,\theta_k) m(t_m-0\,|\,\theta_k)\right\}}\, p_{t_m-0}(\theta_k) \times$$

$$\times\left[\sum_{\alpha=0}^{r} p_{t_m-0}(\theta_\alpha)\left[\frac{|\Gamma(t_m\,|\,\theta_\alpha)|}{|\Gamma(t_m-0\,|\,\theta_\alpha)|}\right]^{1/2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\exp\left\{\frac{1}{2}m^{\mathrm{T}}(t_m\,|\,\theta_\alpha)\,\Gamma^{-1}(t_m\,|\,\theta_\alpha)\,m(t_m\,|\,\theta_\alpha)\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2}m^{\mathrm{T}}(t_m-0\,|\,\theta_\alpha)\,\Gamma^{-1}(t_m-0\,|\,\theta_\alpha)\,m(t_m-0\,|\,\theta_\alpha)\right\}}\right]^{-1}. \qquad (10)$$

В формулах (8)—(10) $|B|$ есть определитель матрицы B, а

$$m(t_m-0\,|\,\theta_k)=\lim_{t\uparrow t_m} m(t\,|\,\theta_k), \quad \Gamma(t_m-0\,|\,\theta_k)=\lim_{t\uparrow t_m}\Gamma(t\,|\,\theta_k),$$

$$p_{t_m-0}(\theta_k)=\lim_{t\uparrow t_m} p_t(\theta_k),$$

т. е. являются решениями уравнений (5)—(7) на предыдущем полуинтервале $t_{m-1}\leqslant t<t_m$, вычисленными в точке $t=t_m$.

Утверждение 2. Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка интерполяции $m(\tau, t)$ вектора состояния $x(t)$ системы (1) определяется формулой

$$m(\tau, t)=\sum_{k=0}^{r} p_t(\theta_k),\, m(\tau,t|\theta_k), \qquad (11)$$

где $m(\tau, t|\theta_k)$ задаются на полуинтервале $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ для всех $\theta_k\in\Xi$ уравнениями:

$$d_t m(\tau, t\,|\,\theta_k)=\Gamma_{12}^{\mathrm{T}}(\tau, t\,|\,\theta_k)\,H^{\mathrm{T}}(t)\,R^{-1}(t)\,[dz(t)-H(t)\,m(t\,|\,\theta_k)\,dt]; \qquad (12)$$

$$\frac{d\Gamma_{12}(\tau, t\,|\,\theta_k)}{dt}=\left[F(\theta_k, t)-\Gamma(t\,|\,\theta_k)\,H^{\mathrm{T}}(t)\,R^{-1}(t)\,H(t)\right]\Gamma_{12}(\tau, t\,|\,\theta_k); \qquad (13)$$

$$\frac{d\Gamma_{22}(\tau, t\,|\,\theta_k)}{dt}=-\Gamma_{12}^{\mathrm{T}}(\tau, t\,|\,\theta_k)\,H^{\mathrm{T}}(t)\,R^{-1}(t)\,H(t)\,\Gamma_{12}(\tau, t\,|\,\theta_k) \qquad (14)$$

с начальными условиями

$$m(\tau, t_m\,|\,\theta_k)=m(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)+\Gamma_{12}^{\mathrm{T}}(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)\,G^{\mathrm{T}}(t_m)\big[N(t_m)+$$
$$+G(t_m)\,\Gamma(t_m-0\,|\,\theta_k)\,G^{\mathrm{T}}(t_m)\big]^{-1}[\eta(t_m)-G(t_m)\,m(t_m-0\,|\,\theta_k)]; \qquad (15)$$

$$\Gamma_{12}(\tau,t_m|\theta_k)=\Gamma_{12}(\tau,\ t_m-0|\theta_k)-\Gamma(t_m-0|\theta_k)\,G^{\mathrm{T}}(t_m)\,[N(t_m)+$$
$$+G(t_m)\,\Gamma(t_m-0|\theta_k)\,G^{\mathrm{T}}(t_m)]^{-1}G(t_m)\,\Gamma_{12}(\tau,\ t_m-0|\theta_k); \qquad (16)$$

$$\Gamma_{22}(\tau, t_m\,|\,\theta_k)=\Gamma_{22}(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)-\Gamma_{12}^{\mathrm{T}}(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)\,G^{\mathrm{T}}(t_m)\,[N(t_m)+$$
$$+G(t_m)\,\Gamma(t_m-0\,|\,\theta_k)\,G^{\mathrm{T}}(t_m)]^{-1}\,G(t_m)\,\Gamma_{12}(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k). \qquad (17)$$

В формулах (15)—(17)

$$m(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)=\lim_{t\uparrow t_m} m(\tau, t\,|\,\theta_k);$$

$$\Gamma_{12}(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)=\lim_{t\uparrow t_m}\Gamma_{12}(\tau, t\,|\,\theta_k);$$

$$\Gamma_{22}(\tau, t_m-0\,|\,\theta_k)=\lim_{t\uparrow t_m}\Gamma_{22}(\tau, t\,|\,\theta_k),$$

т. е. являются решениями уравнений (12)—(14) на предыдущем полуинтервале $t_{m-1}\leqslant t<t_m$, вычисленными в точке $t=t_m$.

Замечание. Как можно видеть из (11) и (12), для вычисления $m(\tau, t)$ не требуется знание $\Gamma_{22}(\tau, t|\theta_k)$. Но поскольку, как будет ясно из доказательства утверждений 1 и 2, условная (при фиксированных реализациях z_0^t и η_0^m) точность оценки $m(\tau, t)$ определяется формулой

$$\mathrm{tr}\left[\sum_{k=0}^{r} p_t(\theta_k)\Gamma_{22}(\tau, t\,|\,\theta_k)\right]$$

($\mathrm{tr}[B]$ — след матрицы B), то в формулировке утверждения 2 приведено уравнение для $\Gamma_{22}(\tau, t|\theta_k)$.

Доказательство утверждений 1 и 2. Так как оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой является апостериорное среднее [5], то

$$m(t) = \sum_{k=0}^{r}\int x_t p_t(x_t, \theta_k)\,dx_t; \quad m(\tau, t) = \sum_{k=0}^{r}\int x_\tau p_\tau^t(x_\tau, \theta_k)\,dx_\tau, \tag{18}$$

где $p_t(x_t, \theta_k) = \partial P\{x(t)\leqslant x_t,\ \theta=\theta_k\,|\,z_0^t, \eta_0^m\}/\partial x_t$ и $p_\tau^t(x_\tau, \theta_k) = \partial P\{x(\tau)\leqslant x_\tau,\ \theta=\theta_k\,|\,z_0^t, \eta_0^m\}/\partial x_\tau$. Так как $p_t(x_t, \theta_k) = p_t(\theta_k)p_t(x_t|\theta_k)$ $(p_t(x_t\,|\,\theta_k) = \partial P\{x(t)\leqslant x_t\,|\,\theta=\theta_k, z_0^t, \eta_0^m\}/dx_t)$, то из (18) следует формула (4) для $m(t)$, где

$$m(t\,|\,\theta_k) = \int x_t p_t(x_t\,|\,\theta_k)\,dx_t. \tag{19}$$

Если ввести совместную апостериорную плотность $p_\tau^t\ (x_\tau,\ x_t,\ \theta_k) = \partial^2 Px(\tau)\leqslant x_\tau,\quad x(t)\leqslant x_t,\ \theta=\theta_k\,|\,z_0^t, \eta_0^m\}/\partial x_\tau\partial x_t$, то вместо (18) имеем выражения

$$m(t) = \sum_{k=0}^{r}\int\int x_t p_\tau^t(x_\tau, x_t, \theta_k)\,dx_\tau dx_t;$$

$$m(\tau, t) = \sum_{k=0}^{r}\int\int x_\tau p_\tau^t(x_\tau, x_t, \theta_k)\,dx_\tau dx_t. \tag{20}$$

Так как $p_\tau^t(x_\tau, x_t, \theta_k) = p_t(\theta_k)\,p_\tau^t(x_\tau, x_t\,|\,\theta_k)$ $(p_\tau^t(x_\tau, x_t\,|\,\theta_k) = \partial^2 P\{x\ (\tau)\leqslant x_\tau,\ x(t)\leqslant x_t|\theta=\theta_k, z_0^t, \eta_0^m\}/\partial x_\tau\partial x_t)$, то из (20) для $m(t|\theta_k)$ следует эквивалентная (19) формула

$$m(t\,|\,\theta_k) = \int\int x_t p_\tau^t(x_\tau,\ x_t\,|\,\theta_k)\,dx_\tau dx_t,$$

а для $m(\tau,\ t)$ — формула (11), где

$$m(\tau,\ t\,|\,\theta_k) = \int\int x_\tau p_\tau^t(x_\tau, x_t\,|\,\theta_k)\,dx_\tau dx_t.$$

Пусть $t_s<\tau\leqslant t_{s+1}\leqslant t_m\leqslant t<t_{m+1}$. По постановке задачи параметр θ, приняв какое-либо значение из множества Ξ, затем не меняет его, т. е. удовлетворяет уравнению $d_t\theta=0$. Поэтому $p_\tau^t(x_\tau, \theta_k)$ удовлетворяет на полуинтервале $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ уравнению [5]

$$d_t p_\tau^t(x_\tau, \theta_k) = p_\tau^t(x_\tau, \theta_k)\,[dz(t) - h(t)\,dt]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t)\,[h(\tau, t) - h(t)], \tag{21}$$

где

$$h(t) = H(t)\sum_{\alpha=0}^{r} p_t(\theta_\alpha)\,m(t\,|\,\theta_\alpha),\ h(\tau, t) = H(t)\int x_t p_\tau^t(x_t|\,x_\tau, \theta_k)\,dx_t,$$

а

$$p_\tau^t(x_t\,|\,x_\tau, \theta_k) = \partial P\{x(t)\leqslant x_t\,|\,x(\tau) = x_\tau,\ \theta=\theta_k,\ z_\tau^t,\ \eta_{s+1}^m\}/\partial x_t$$

и на полуинтервале $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ удовлетворяет уравнению

$$d_t p_\tau^t(x_t\,|\,x_\tau,\theta_k) = L_{x_t}\left[p_\tau^t(x_t\,|\,x_\tau,\theta_k)\right]dt + p_\tau^t(x_t\,|\,x_\tau,\theta_k)\,[dz(t) - \\ - h(\tau,t)\,dt]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t)\,[H(t)\,x_t - h(\tau,t)]. \qquad (22)$$

Оператор $L_x[\cdot]$ определяется следующим образом ($\varphi(x,\,\cdot)$ — некоторая скалярная функция):

$$L_x[\varphi(x,\,\cdot)] = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,[f_i\varphi]}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\,[Q_{ij}\varphi]}{\partial x_i\partial x_j},\quad f(x,\theta,t) = f(\theta,t) + F(\theta,t)\,x. \qquad (23)$$

Стохастически дифференцируя по формуле Ито [1] выражение $p_\tau^t(x_\tau,x_t,\theta_k) = p_\tau^t(x_\tau,\theta_k)\,p_\tau^t(x_t|x_\tau,\theta_k)$ с использованием уравнений (21), (22), получаем после некоторых преобразований при $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ уравнение

$$d_t p_\tau^t(x_\tau,x_t,\theta_k) = L_{x_t}\left[p_\tau^t(x_\tau,x_t,\theta_k)\right]dt + p_\tau^t(x_\tau,x_t,\theta_k)\,[dz(t) - \\ - h(t)\,dt]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t)\,[H(t)\,x_t - h(t)]. \qquad (24)$$

Интегрирование (24) по x_τ и x_t приводит к уравнению (7). Стохастически дифференцируя $p_\tau^t(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k) = p_\tau^t(x_\tau,x_t,\theta_k)/p_\tau^t(\theta_k)$ с использованием уравнений (24), (7), получаем при $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ уравнение

$$d_t p_\tau^t\,(x_\tau,x_t\,|\theta_k) = L_{x_t}\left[p_\tau^t(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)\right]dt + p_\tau^t(x_\tau,x_t|\,\theta_k)\,[dz(t) - \\ - H(t)\,m(t\,|\,\theta_k)\,dt]^{\mathrm{T}} R^{-1}(t)\,H(t)\,[x_t - m(t\,|\,\theta_k)]. \qquad (25)$$

В уравнениях (24), (25) оператор L_{x_t} действует по переменной x_t согласно формуле (23).

По формулам Байеса и условных вероятностей для $p(x_\tau,x_t,\theta_k\,|\,z_0^{t_m},\eta_0^m) = \partial^2 P\{x(\tau)\leqslant x_\tau,\,x(t_m)\leqslant x_t,\ \theta=\theta_k|\,z_0^{t_m},\eta_0^m\}/\partial x_\tau\partial x_t$ получаем, что

$$p\,(x_\tau,x_t,\theta_k\,|\,z_0^{t_m},\eta_0^m) = \\ = \frac{p\left(\eta(t_m)\,|\,x_\tau,x_t,\theta_k,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\right)p\left(x_\tau,x_t,\theta_k\,|\,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\right)}{\sum\limits_{\alpha=0}^{r}\iint p\left(\eta(t_m)\,|\,y_\tau,y_t,\theta_\alpha,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\right)p\left(y_\tau,y_t,\theta_\alpha\,|\,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\right)dy_\tau dy_t}. \qquad (26)$$

Так как

$$p\,(x_\tau,x_t,\theta_k\,|\,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}) = \lim_{t\uparrow t_m} p_\tau^t(x_\tau,x_t,\theta_k) = p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t,\theta_k),$$

а

$$p\left(\eta(t_m)\,|\,x_\tau,x_t,\theta_k,z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\right) = [2\pi\,|\,N(t_m)\,|\,]^{-1/2}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\,[\eta(t_m) - G(t_m)\,x_t]^{\mathrm{T}} N^{-1}(t_m)\,[\eta(t_m) - G(t_m)\,x_t]\right\},$$

то, подставляя последнее соотношение в (26), получаем, что начальное условие для уравнения (24) имеет вид

$$p_\tau^{t_m}(x_\tau,x_t,\theta_k) = [c\,(\eta(t_m),x_t,\theta_k)/c\,(\eta(t_m))]\,p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t,\theta_k). \qquad (27)$$

Здесь

$$c(\eta(t_m),\ x_t,\ \theta_k) = \exp\{-0{,}5[\eta(t_m) - G(t_m)\,x_t]^{\mathrm{T}} N^{-1}(t_m)\times \\ \times[\eta(t_m) - G(t_m)\,x_t]\};$$

$$c\,(\eta(t_m)) = \sum_{\alpha=0}^{r} p_{t_m-0}(\theta_\alpha)\,c\,(\eta(t_m),\theta_\alpha),\ c\,(\eta(t_m),\theta_k) = \\ = \int c\,(\eta(t_m),x_t,\theta_k)\,p_{t_m-0}(x_t\,|\,\theta_k)\,dx_t.$$

В (28) $p_{t_m-0}(x_t\,|\,\theta_k)=\lim\limits_{t\uparrow t_m} p_t(x_t\,|\,\theta_k)$ $(p_t(x_t\,|\,\theta_k)=\partial P\{x(t)\leqslant x_t\,|\,\theta=\theta_k,$ $z_0^t,\eta_0^m]/\partial x_t)$ и удовлетворяет на полуинтервале $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ уравнению

$$d_t p_t(x_t\,|\,\theta_k)=L_{x_t}[p_t(x_t\,|\,\theta_k)]\,dt+p_t(x_t\,|\,\theta_k)\,[dz(t)-$$
$$-H(t)\,m(t\,|\,\theta_k)\,dt]^{\mathrm{T}}R^{-1}(t)\,H(t)\,[x_t-m(t\,|\,\theta_k)],\tag{29}$$

которое получается, если проинтегрировать (25) по x_τ. Интегрируя (27) по x_τ и x_t, определяем начальное условие для уравнения (7)

$$p_{t_m}(\theta_k)=[c(\eta(t_m),\theta_k)/c(\eta(t_m))]\,p_{t_m-0}(\theta_k).\tag{30}$$

Из (27) и (30) получаем начальное условие для уравнения (25)

$$p_\tau^{t_m}(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)=[c(\eta(t_m),x_t,\theta_k)/c(\eta(t_m),\theta_k)]\,p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k).\tag{31}$$

Аналогично интегрирование (31) по x_τ дает начальное условие для уравнения (29):

$$p_{t_m}(x_t\,|\,\theta_k)=[c(\eta(t_m),x_t,\theta_k)/c(\eta(t_m),\theta_k)]\,p_{t_m-0}(x_t\,|\,\theta_k).\tag{32}$$

В (27), (31) и (32) $p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t,\theta_k)$, $p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)$ и $p_{t_m-0}(x_t\,|\,\theta_k)$ являются решениями соответственно уравнений (24), (25) и (29) на предыдущем полуинтервале $t_{m-1}\leqslant t<t_m$, вычисленными в точке $t=t_m$.

В дальнейшем через $N\{a;\ b\}$ будем обозначать нормальное распределение с параметрами a и b. Условия п. 1 данной работы обеспечивают на полуинтервале $t_m\leqslant t<t_{m+1}$ для вероятности $p_\tau^t(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)$, удовлетворяющей уравнению (25), свойство [5]

$$p_\tau^t(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)=N\{\widetilde{m}(\tau,t\,|\,\theta_k);\ \widetilde{\Gamma}(\tau,t\,|\,\theta_k)\}=$$
$$=N\left\{\begin{bmatrix} m(t\,|\,\theta_k)\\ \hdashline m(\tau,t\,|\,\theta_k)\end{bmatrix};\ \left[\begin{array}{c:c}\Gamma(t\,|\,\theta_k) & \Gamma_{12}(\tau,t\,|\,\theta_k)\\ \hdashline \Gamma_{12}^{\mathrm{T}}(\tau,t\,|\,\theta_k) & \Gamma_{22}(\tau,t\,|\,\theta_k)\end{array}\right]\right\},$$

если

$$p_\tau^{t_m}(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)=N\{\widetilde{m}(\tau,t_m\,|\,\theta_k);\ \widetilde{\Gamma}(\tau,t_m\,|\,\theta_k)\},\tag{33}$$

причем параметры этого распределения будут определяться уравнениями (5), (6), (12)—(14). Эти уравнения могут быть получены, например, по методу семиинвариантной функции для $p_\tau^t(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)$, как и в работе [8]. Аналогично для $t_m\leqslant t<t_{m+1}$

$$p_t(x_t\,|\,\theta_k)=N\{m(t\,|\,\theta_k);\ \Gamma(t\,|\,\theta_k)\},\tag{34}$$

если

$$p_{t_m}(x_t\,|\,\theta_k)=N\{m(t_m\,|\,\theta_k);\ \Gamma(t_m\,|\,\theta_k)\}.\tag{35}$$

Пусть

$$p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)=N\{\widetilde{m}(\tau,t_m-0\,|\,\theta_k);\ \widetilde{\Gamma}(\tau,t_m-0\,|\,\theta_k)\}.\tag{36}$$

Тогда

$$c(\eta(t_m),x_t,\theta_k)\,p_\tau^{t_m-0}(x_\tau,x_t\,|\,\theta_k)=\left[(2\pi)^{2n}\,|\widetilde{\Gamma}(\tau,t_m-0\,|\,\theta_k)|\,\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\,[\widetilde{\eta}(t_m)-\widetilde{G}(t_m)\,\widetilde{x}_t]^{\mathrm{T}}\,\widetilde{N}(t_m)\,[\widetilde{\eta}(t_m)-\widetilde{G}(t_m)\,\widetilde{x}_t]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\,[\xi-\widetilde{m}(\tau,t_m-0\,|\,\theta_k)]^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\Gamma}^{-1}(\tau,t_m-$$
$$-0\,|\,\theta_k)\,[\xi-\widetilde{m}(\tau,t_m-0\,|\,\theta_k)]\right\},\tag{37}$$

где

$$\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \eta \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} x_t \\ \cdots \\ x_\tau \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \left[\begin{array}{c:c} G & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{N} = \left[\begin{array}{c:c} N^{-1} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Записывая в (37) произведение экспонент в виде одной экспоненты и дополняя ее показатель до полного квадрата, получаем после ряда алгебраических преобразований, что

$$c(\eta(t_m), x_t, \theta_k)\, p_\tau^{t_m-0}(x_\tau, x_t \mid \theta_k) = C(\cdot)\, N\{\tilde{m}(\tau, t_m \mid \theta_k);\ \tilde{\Gamma}(\tau, t_m \mid \theta_k)\}, \tag{38}$$

где $C(\cdot)$ — члены, не зависящие от переменных x_t и x_τ. Аналогичным образом, предполагая, что

$$p_{t_m-0}(x_t \mid \theta_k) = N\{m(t_m - 0 \mid \theta_k);\ \Gamma(t_m - 0 \mid \theta_k)\}, \tag{39}$$

можно получить

$$c(\eta(t_m), x_t, \theta_k)\, p_{t_m-0}(x_t \mid \theta_k) = C_1(\cdot)\, N\{m(t_m \mid \theta_k);\ \Gamma(t_m \mid \theta_k)\}, \tag{40}$$

где

$$C_1(\cdot) = \left[\frac{|\Gamma(t_m \mid \theta_k)|}{|\Gamma(t_m - 0 \mid \theta_k)|}\right]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{\exp\left\{\frac{1}{2} m^{\mathrm{T}}(t_m \mid \theta_k)\, \Gamma^{-1}(t_m \mid \theta_k)\, m(t_m \mid \theta_k)\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2} m^{\mathrm{T}}(t_m - 0 \mid \theta_k)\, \Gamma^{-1}(t_m - 0 \mid \theta_k)\, m(t_m - 0 \mid \theta_k)\right\}}. \tag{41}$$

При этом оказывается, что параметры нормального распределения в (38) определяются формулами

$$\begin{gathered} \tilde{m}(\tau, t_m \mid \theta_k) = \tilde{\Gamma}(\tau, t_m \mid \theta_k)\, [\tilde{G}^{\mathrm{T}}(t_m)\, \tilde{N}(t_m)\, \tilde{\eta}(t_m) + \tilde{\Gamma}^{-1}(\tau, t_m - \\ - 0 \mid \theta_k)\, \tilde{m}(\tau, t_m - 0 \mid \theta_k)];\ \tilde{\Gamma}(\tau, t_m \mid \theta_k) = [\tilde{\Gamma}^{-1}(\tau, t_m - 0 \mid \theta_k) + \\ + \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t_m)\, \tilde{N}(t_m)\, \tilde{G}(t_m)]^{-1}. \end{gathered} \tag{42}$$

Пользуясь формулами матричных преобразований из [9, с. 109] в предположении, что все встречающиеся при этом обратные матрицы существуют, можно привести уравнения (42) к виду (8), (9), (15)—(17). Использование (40), (41), (28) в (30) приводит к формуле (10). Подстановка (40) в (32) дает, что (35) справедливо, если справедливо предположение (39). Предположение (39) доказывается как утверждение по методу математической индукции с учетом того, что по постановке задачи $p_t(x_t \mid \theta_k)|_{t=t_0} = N\{m_0; \Gamma_0\}$ для любого $\theta_k \in \Xi$. Наконец, подстановка (38) в (31) дает, что (33) справедливо, если справедливо предположение (36). Предположение (36) доказывается как утверждение по методу математической индукции с учетом $p_\tau^t(x_\tau, x_t \mid \theta_k)|_{t=\tau} = p_t(x_t \mid \theta_k)|_{t=\tau}$ и свойства (34). Этим завершается доказательство утверждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
2. **Lainiotis D. G.** Optimal adaptive estimation: structure and parameter adaptation.— "IEEE Trans. on Automatic Control", 1971, vol. AC-16, N 2, p. 160—170.
3. **Калман Р. Е., Бьюси Р. С.** Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания.— «Техническая механика, сер. Д», 1961, т. 83, с. 123—141.

4. **Липцер Р. Ш.** Об экстраполяции и фильтрации некоторых марковских процессов.— «Кибернетика», 1968, № 3, с. 63—70.
5. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.
6. **Кицул П. И.** Нелинейная фильтрация по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений.— В кн.: Адаптация, самоорганизация. (Доклады Второго всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления.) М., «Наука», 1970, с. 52—57.
7. **Кицул П. И.** К решению одной задачи эффективной последовательной интерполяции.— «Автоматика и телемеханика», 1974, № 12, с. 89—95.
8. **Демин Н. С.** О прямых уравнениях интерполяции для векторов состояний динамических систем.— В кн.: Третье всесоюзное совещание по статистическим методам в процессах управления. (Тезисы докладов.) М., изд. Института проблем управления, 1973, с. 65—67.
9. **Аоки М.** Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971.

Поступила в редакцию 11 июня 1976 г.;
окончательный вариант — 10 июня 1977 г.

УДК 621.391.828

И. М. ВИШЕНЧУК, А. В. ГУПАЛО, В. В. ТРОЦЕНКО

(Львов)

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ НАКЛОНА ЛИНЕЙНОГО ТРЕНДА

При испытаниях систем автоматического контроля иногда возникает задача оценки наклона линейного тренда, содержащегося в выходном сигнале. Предположим, что процесс на выходе системы имеет вид

$$x(t)=c+st+n(t). \tag{1}$$

Здесь c, s — параметры линейного тренда; $n(t)$ — помеха некоторого вида. Процесс (1) наблюдается на интервале времени $|t|\leqslant T/2$. Необходимо разработать алгоритм вычисления оценки $\hat{s}$ наклона, ориентированный на борьбу с помехами.

В [1] описаны два метода исключения линейного тренда в результатах наблюдений. Непосредственное заимствование полученных результатов затрудняется тем, что в работе не указаны границы применения методов и не проведено их сравнение. Кроме того, параметры метода среднего наклона выбраны без пояснений. По этим причинам в данной статье проводится анализ поставленной задачи в терминах метода весовых функций, позволяющего довести сравнение до частотных характеристик.

Представим обработку сигнала на вычислителе как

$$\hat{s}=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,x(t)\,dt, \tag{2}$$

где $g(t)$ — весовая функция, отличная от нуля на интервале (или части интервала) наблюдения $|t|\leqslant T/2$. Рассмотрим два вида весовых функций.

I. Кусочно-постоянная весовая функция

$$g(t)=g_1(t)=\begin{cases} 4\,\mathrm{sign}\,(t)/(T^2(1-\alpha^2)) & \text{при} \quad \alpha T/2\leqslant |t|\leqslant T/2; \\ \text{иначе } 0. \end{cases} \tag{3}$$