4. Райс. Теория флуктуационных шумов.— В кн.: Теория передачи электрических
8. Большаков И. А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. М., «Сов. радио», 1969.

Поступило в редакцию 18 сентября 1975 г.;
окончательный вариант — 1 февраля 1977 г.

УДК 681.3 : 519.2

И. С. МИКАДЗЕ

(Тбилиси)

К ВОПРОСУ ОСУЩЕСТВИМОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ УСТРОЙСТВОМ С НЕНАГРУЖЕННЫМ РЕЗЕРВОМ

Рассмотрим возможность решения за заданное время t одной большой задачи вычислительной системой (ВС), состоящей из одного рабочего вычислительного устройства (ВУ) и $m-1$ резервных устройств, находящихся в ненагруженном режиме («холодный» резерв).

Пусть резервные устройства не отказывают, находясь в нерабочем состоянии, и пребывание резервного устройства в таком состоянии не изменяет его надежности в рабочем состоянии; решаемая задача состоит из n алгоритмов (этапов), интервалы времени решения которых являются независимыми случайными величинами, распределенными по произвольному закону $F_j(t)$, $j=\overline{1, n}$; отказавшие ВУ обслуживаются одной ремонтной бригадой, и время их восстановления распределено по показательному закону с интенсивностью ν; рабочее ВУ подвергается двум видам отказов [1—3]: при первом рабочее устройство отключается и включается резервное устройство, а при втором виде отказа (сбои) рабочее устройство остается включенным; при первом виде отказа обесценивается вся проделанная работа, а при втором обесценивается проделанная работа в пределах одного этапа; переключающее устройство абсолютно надежно; потоки отказов распределены по закону Пуассона с интенсивностями соответственно α_j и β_i $(j=\overline{1, n})$; аппаратурный контроль идеален и способен мгновенно обнаруживать неисправность.

Процесс решения задачи ВС рассмотрим как полумарковский процесс с конечным количеством состояний [4—8] и введем вероятности $\Phi(t, j, k, m)$ того, что решение задачи закончится в течение времени t, если ее решение начнется с j-го этапа при условии, что из общего количества m ВУ уже отказали k устройств (решение j-го этапа начинается в момент времени $t=0$ при наличии k отказавших устройств).

Рассмотрим две модели такой ВС.

Модель I. Пусть имеют место оба вида отказов. Отказавшие устройства не подлежат восстановлению, и если в процессе решения задачи откажут все m устройств, то задание считается невыполненным ВС, т. е.

$$\Phi(t, j, m, m)=0,\ j=\overline{1, n}.$$

Процесс решения задачи может быть описан с помощью следующей математической модели. Рассматриваемая ВС может находиться в n различных состояниях в зависимости от номера решаемого этапа в данный момент. Интервалы времени, в течение которых ВС находится в i-м $(i=1, n)$ состоянии, являются независимыми случайными величинами. Вероятность перехода из состояния i в любое другое состояние j не зависит от номеров ранее решавшихся этапов.

Опишем эту модель, следуя [4], с помощью полумарковских процессов. В соответствии с [4] полумарковский процесс с конечным числом состояний $\xi(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ полностью определяется временем пребывания в состояниях e_i с функциями распределения $P_i(t)$ и условными вероятностями $q_{ij}(t)$; $i, j=\overline{1, n}$, переходов из состояния e_i в состояние e_j, при условии, что полумарковский процесс находится в состоянии e_i в течение времени t.

В нашем случае нет необходимости определять условные вероятности $q_{ij}(t)$, а достаточно выразить через исходные характеристики процесса переходные вероятности

Очевидно, что в соответствии с вышеизложенным возможны следующие события.

1. В момент u заканчивается решение j-го этапа, а отказы как первого, так и второго вида до этого момента не возникают, и ВС переходит в e_{j+1}-е состояние. Вероятность этого события

$$P_{j,j+1}(du) = P\,[u < \xi_j = \eta < u + du;\quad \eta < \min(\eta_1, \eta_2)] = dF_j(u)\, e^{-(\alpha_j+\beta_j)u}. \quad (1а)$$

2. В момент u возникает отказ первого вида, причем за это время решение j-го этапа не заканчивается и не возникает отказ второго вида. Система переходит в e_1-е состояние. Вероятность этого события

$$P_{j1}(du) = P\,[u < \xi_j = \eta_1 < u + du;\quad \eta_1 < \min(\eta_2, \eta)] = \alpha_j e^{-(\alpha_j+\beta_j)u}\,[1 - F_j(u)]\,du. \quad (1б)$$

3. В момент u возникает отказ второго вида, причем за это время не появляется отказ первого вида и не заканчивается решение j-го этапа. Система переходит к началу j-го состояния. Вероятность этого события

$$P_{jj}(du) = P\,[u < \xi_j = \eta_2 < u + du;\quad \eta_2 < \min(\eta_1, \eta)] = \beta_j e^{-(\alpha_j+\beta_j)u}\,[1 - F_j(u)]\,du. \quad (1в)$$

Пусть $\tau_j(k, m)$ — реальное время, необходимое для окончания решения задачи, если оно начнется с j-го этапа при наличии k отказавших устройств. Тогда по теореме полной вероятности с учетом потерь времени v_1 и v_2 при отказах первого и второго видов можно написать следующую систему стохастических уравнений для $\tau_j(k, m)$:

$$\tau_j(k, m) = \xi_j + \sigma_{j,j+1}(\xi_j)\,\tau'_{j+1}(k, m) + \sigma_{j1}(\xi_j)\,[v_1 + \tau'_1(k+1, m)] +$$
$$+ \sigma_{jj}(\xi_j)\left[v_2 + \tau'_j(k, m)\right];\quad k = \overline{0, m-1};\ j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{ji}(\xi_j)$, $i = j+1$, j, 1 — несовместимые индикаторы, равные единице с вероятностью, определяемой выражениями (1а) — (1в) соответственно; τ_j, τ'_j при каждом j независимы и одинаково распределены; ξ_i, τ'_j, и σ_{ij}, τ'_j, попарно независимы. Очевидно, что ранее введенная вероятность

$$\Phi(t, j, k, m) = P\,[\tau_j(k, m) < t] = P\,[\sigma_{j,j+1}(\xi_j) =$$
$$= 1;\ \tau'_{j+1}(k, m) < t - \xi_j] + P\,[\sigma_{j1}(\xi_j) = \quad (3)$$
$$= 1;\ v_1 + \tau'_1(k+1, m) < t - \xi_j] + P\left[\sigma_{jj}(\xi_j) = 1;\ v_2 + \tau'_j(k, m) < t - \xi_j\right].$$

С учетом (1а) — (1в) и (3) время решения задачи определяется следующей системой интегральных уравнений:

$$\Phi(t, j, k, m) = \int_0^t dF_j(u)\, e^{-(\alpha_j+\beta_j)u}\,\Phi(t-u,\ j+1,\ k,\ m) +$$
$$+ \alpha_j \int_0^t e^{-(\alpha_j+\beta_j)u} du\,[1 - F_j(u)] \int_0^{t-u} dG_1(v)\,\Phi(t-u-v,\ 1,\ k+1,\ m) +$$
$$+ \beta_j \int_0^t e^{-(\alpha_j+\beta_j)u} du\,[1 - F_j(u)] \int_0^{t-u} dG_2(v)\,\Phi(t-u-v,\ j,\ k,\ m);$$
$$k = \overline{0,\ m-1};\ \Phi(t,\ j,\ m,\ m) = 0;\ j = \overline{1,\ n}. \quad (4)$$

Граничными условиями являются

$$\Phi(t,\ n+1,\ k,\ m) = 1;\ k = \overline{0,\ m-1}, \quad (5)$$

если решаемая задача состоит только из n этапов.

Применив к (4) и (5) преобразование Лапласа — Стилтьеса, получим

$$a_j(s)\varphi(s,\ 1,\ k+1,\ m)-b_j(s)\varphi(s,\ j,\ k,\ m)+c_j(s)\varphi(s,\ j+1,\ k,\ m)=0;\quad \varphi(s,\ j,\ m,\ m)=0; \tag{6}$$

$$\varphi(s,\ n+1,\ k,\ m)=s^{-1};\ j=\overline{1,\ n};\ k=\overline{0,\ m-1},$$

где

$$a_j(s)=\alpha_j[1-f_j(p_j)]g_1(s)/p_j;\quad b_j(s)=1-\beta_j[1-f_j(p_j)]g_2(s)/p_j;$$

$$c_j(s)=f_j(p_j);\quad \varphi(s,\ j,\ k,\ m)=\int_0^\infty e^{-st}\,\Phi(t,\ j,\ k,\ m)\,dt;$$

$$\varphi(s,\ n+1,\ k,\ m)=\int_0^t e^{-st}\,\Phi(t,\ n+1,\ k,\ m)\,dt=s^{-1}; \tag{7}$$

$${}_j(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF_j(t);\quad g_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dG_i(t),\quad i=1,2;\ P_j=s+\alpha_j+\beta_j.$$

Решение системы (6) можно записать в виде следующих рекуррентных соотношений:

$$\varphi(s,\nu,k,m)=\frac{1}{s}\prod_{i=\nu}^{n}\frac{c_i(s)}{b_i(s)}+\left[\sum_{l=0}^{n-\nu}\frac{a_{n-l}(s)}{b_{n-l}(s)}\prod_{i=\nu}^{n-l-1}\frac{c_i(s)}{b_i(s)}\right]\varphi(s,\ \nu,\ k+1,\ m);$$

$$\varphi(s,\nu,m,m)=0;\quad k=\overline{1,\ m-1};\quad \nu=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Практический интерес представляет случай, когда в момент начала решения задачи ВС все ВУ исправны, т. е. $\nu=1$ и $k=0$; для этого случая выражение (8) принимает вид

$$\varphi(s,1,0,m)=\frac{1}{s}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{c_i(s)}{b_i(s)}\right)\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{l=0}^{n-1}\frac{a_{n-l}(s)}{b_{n-l}(s)}\prod_{i=1}^{n-l-1}\frac{c_i(s)}{b_i(s)}\right)^k\right]. \tag{9}$$

Здесь в отличие от рассмотренной ниже модели ВС с восстановлением $\Phi(t,\ j,\ k,\ m)$ — несобственная функция распределения, так как рассматриваемый полумарковский процесс является обрывающейся цепью. Действительно, если в процессе решения задачи наступит такое состояние системы, когда $k=m$, то решение задачи вообще не закончится, т. е.

$$\Phi(t,\ j,\ m,\ m)=0 \text{ при } t=\overline{0,\ \infty} \text{ и } j=\overline{1,\ n}.$$

Если введем $a_0(j,\ k,\ m)$ — вероятность того, что решение задачи вообще закончится, т. е.

$$a_0(j,\ k,\ m)=\lim_{t\to\infty}\Phi(t,\ j,\ k,\ m)=\lim_{s\to 0}[s\varphi(s,\ j,\ k,\ m)]<1,$$

то выражение $\overline{\Phi}(t,\ j,\ k\ m)=\Phi(t,\ j,\ k,\ m)/a_0(j,\ k,\ m)$ принимает смысл условного распределения вероятности.

Обозначив

$$\overline{\varphi}(s,j,k,m)=\int_0^\infty e^{-st}\,\overline{\Phi}(t,j,k,m)\,dt=\frac{\varphi(s,j,k,m)}{a_0(j,k,m)}$$

с учетом

$$\lim_{s\to 0}[s\overline{\varphi}(s,\ j,\ k,\ m)]=1 \text{ и } \lim_{s\to 0}|s\overline{\varphi}(s,\ j,\ k,\ m)|'=-T(j,\ k,\ m),$$

систему (6) можно преобразовать в систему уравнений относительно условных средних значений времени решения задачи $T(j,\ k,\ m)$, если ее решение начнется с j-го этапа при наличии k отказавших устройств при условии, что задача вообще будет решена. Для этого умножаем обе стороны (6) на $s/a_0(j,\ k,\ m)$, находим производные всех членов, после чего переходим к пределу при $s\to 0$. В результате этих преобразований из (6) получаем следующую систему уравнений относительно $T(j,\ k,\ m)$:

$$b_j(0)T(j,\ k,\ m)-a_j(0)T(1,\ k+1,\ m)=c_j(0)T(j+1,\ k,\ m)+d_j(0);\quad T(n+1,\ k,\ m)=0;$$

$$T(j,\ m,\ m)=0;\ j=\overline{1,\ n};\ k=\overline{0,\ m-1}, \tag{10}$$

где

$$a_j(0)=\alpha_j[1-f_j(\alpha_j+\beta_j)]/(\alpha_j+\beta_j);$$

$$b_j(0)=1-[1-f_j(\alpha_j+\beta_j)]\beta_j/(\alpha_j+\beta_j);$$

$$c_j(0)=f_j(\alpha_j+\beta_j);\quad d_j(0)=\left[\alpha_j g_1'(0)+\beta_j g_2'(0)-1\right][1-f_j(\alpha_j+\beta_j)]/(\alpha_j+\beta_j). \tag{10а}$$

В результате решения системы (10) получим следующее рекуррентное соотношение относительно $T(\nu,\ k,\ m)$:

$$T(\nu, k, m) = \sum_{l=0}^{n-\nu} \left[\frac{a_{n-l}(0)\, T(1, k+1, m) + d_{n-l}(0)}{b_{n-l}(0)} \prod_{i=\nu}^{n-l-1} \frac{c_i(0)}{b_i(0)} \right];$$

$$k = \overline{0, m-1}; \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{10а}$$

При $\nu=1$ и $k=0$ из (10а) получим

$$T(1, 0, m) = \sum_{l=0}^{n-1} \left\{ \left[\frac{a_{n-l}(0)\, T(1, 1, m) + d_{n-l}(0)}{b_{n-l}(0)} \right] \prod_{i=1}^{n-l-1} \frac{c_i(0)}{b_i(0)} \right\}. \tag{10б}$$

Если все этапы решаемой задачи распределены одинаково, из (10б) получим

$$T(1,\ 0,\ m) = [a(0)T(1,\ 1,\ m) + d(0)]/b(0)\,(D^n - 1)/(D-1) \tag{10в}$$

$$(D = c(0)/b(0)).$$

Модель II. Восстанавливаемый ненагруженный резерв. Имеет место первый вид неисправности. Переключение на резервное устройство происходит без потери времени. Обесценивается проделанная работа в пределах решаемого этапа. Функция распределения вероятности времени восстановления показательная, т. е.

$$G(u) = 1 - \exp(-\nu u).$$

Аналогично для этой модели составляем следующую систему интегральных уравнений:

$$\Phi(t, j, k, m) = \int_0^t dF_j(u)\, e^{-\alpha_j u}\, \overline{G}(u)\, \Phi(t-u,\ j+1,\ k,\ m) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t dF_j(u)\, e^{-\alpha_j u}\, \Phi(t-u,\ j+1,\ k-i,\ m) \int_0^u dG_i(v)\, \overline{G}(u-v) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \alpha_j e^{-\alpha_j u} \overline{F}_j(u)\, \Phi(t-u,\ j,\ k-i+1,\ m)\, du \int_0^u dG_i(v)\, \overline{G}(u-v) +$$

$$+ \int_0^t \alpha_j e^{-\alpha_j u} \overline{F}_j(u)\, \overline{G}(u) \Phi(t-u,\ j,\ k+1,\ m)\, du +$$

$$+ \int_0^t dF_j(u)\, e^{-\alpha_j u} G_k(u)\, \Phi(t-u,\ j+1,\ 0,\ m) +$$

$$+ \int_0^t \alpha_j e^{-\alpha_j u} \overline{F}_j(u)\, G_k(u)\, \Phi(t-u,\ j,\ 1,\ m)\, du; \tag{11}$$

$$\Phi(t, j, 0, m) = \int_0^t dF_j(u)\, e^{-\alpha_j u} \Phi(t-u,\ j+1,\ 0,\ m) +$$

$$+ \int_0^t \alpha_j e^{-\alpha_j u} \overline{F}_j(u) \Phi(t-u,\ j,\ 1,\ m)\, du; \quad \Phi(t, j, m, m) =$$

$$= \int_0^t dG(u)\, \Phi(t-u,\ j,\ m-1,\ m); \quad k = \overline{1, m-1};\ j = \overline{1, n},$$

где

$$G_k(t) = \int_0^t dG_{k-1}(v)\, G(t-v) = 1 - e^{-\nu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\nu t)^i}{i!}; \tag{12}$$

$$\overline{G}(u) = 1 - G(u);\ \overline{F}_j(u) = 1 - F_j(u).$$

Граничными условиями являются

$$\Phi(t,\ n+1,\ k,\ m) = Q(t,\ k,\ m);\ k = \overline{0,\ m}. \tag{13}$$

Расшифруем одно из слагаемых (11), скажем, второе: за время u заканчивается решение j-го этапа — $dF_j(u)$; за это время не наступает отказ — $\exp(-\alpha_j u)$ и количество восстановленных устройств составит $i - \int_0^u dG_i(v)\, \overline{G}(u-v)$; решение задачи заканчивается за время $t-u$, если ее решение начнется с $j+1$-го этапа при условии, что количество отказавших устройств к этому моменту составит $k-i-\Phi(t-u,\ j+1,\ k-i,\ m)$.

Применив к (11) и (13) преобразование Лапласа — Стилтьеса, получим

$$\varphi(s,\ j,\ k,\ m) = a_{1j}(s)\,\varphi(s,\ j+1,\ k,\ m) + \sum_{i=1}^{k-1}[b_{ij}\ \varphi(s,\ j+1,\ k-i,\ m) +$$

$$\varphi(s,\ j,\ m,\ m) = \frac{\nu}{s+\nu}\,\varphi(s,\ j,\ m-1,\ m);$$

$$k=\overline{1,\ m-1};\ j=\overline{1,\ n};\ \varphi(s,\ n+1,\ k,\ m)=q(s,\ k,\ m),\ k=\overline{0,\ m}, \qquad (14в)$$

где

$$a_{1j}(s) = f_j(p_{2j});\quad b_{ij}(s) = \frac{(-\nu)^i}{i!}\frac{d^i}{dp_{2j}^i}[f_j(p_{2j})];\ c_{ij}(s) = \alpha_j\,\frac{(-\nu)^i}{i!}\frac{d^i}{dp_{2j}^i}\left[\frac{1-f_j(p_{2j})}{p_{2j}}\right];$$

$$a_{0j}(s) = \alpha_j\left[\frac{1-f_j(p_{2j})}{p_{2j}}\right];\quad f_j(s) = \int_0^\infty e^{-st}dF_j(t);$$

$$b_{0j}^{(s)} = \alpha_j\left\{\frac{1-f_j(p_{1j})}{p_{1j}} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-\nu)^i}{i!}\frac{d^i}{dp_{2j}^i}\left[\frac{1-f_j(p_{2j})}{p_{2j}}\right]\right\};$$

$$\varphi(s,\ j,\ k,\ m) = \int_0^\infty e^{-st}\Phi(t,\ j,\ k,\ m)\,dt;\quad d_{kj}(s) = \int_0^\infty e^{-st}G_k(t)\,dF_j(t) =$$

$$= f_j(s) - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-\nu)^i}{i!}\frac{d^i}{dp_0^i}f_j(s+\nu);\quad q(s,\ k,\ m) = \int_0^\infty e^{-st}Q(t,\ k,\ m)\,dt; \qquad (15)$$

$$\frac{d^0 f_j(p_{2j})}{dp_{2j}^0} = f_j(p_{2j});\quad l_j(s) = \alpha_j\,\frac{1-f_j(p_{1j})}{p_{1j}};\quad p_{1j} = s+\alpha_j;$$

$$p_{2j} = s+\alpha_j+\nu;\quad p_0 = s+\nu.$$

Решая систему (14), находим $\varphi(s,\ 1,\ 0,\ m)$, т. е. операторное выражение функции распределения времени решения задачи, если ее решение начнется с первого этапа ($j=1$) при всех исправных ВУ ($k=0$), а также находим все основные характерные параметры ВУ, обеспечивающие оптимальное прохождение программы решения задачи через рассматриваемую ВС.

Для решения системы (14) уравнение (14а) перепишем в следующем виде:

$$a_{0j}(s)\,\varphi(s,\ j,\ k+1,\ m) = \left(1-c_{1j}(s)\right)\varphi(s,\ j,\ m,\ k) - b_{0j}(s)\,\varphi(s,\ j,\ 1,\ m) -$$

$$- a_{1j}(s)\,\varphi(s,\ j+1,\ k,\ m) - d_{kj}(p_{1j})\,\varphi(s,\ j+1,\ 0,\ m) -$$

$$- \sum_{i=2}^{k-1} c_{ij}(s)\ \varphi(s,\ j,\ k-i+1,\ m) - \sum_{i=1}^{k-1} b_{ij}(s)\,\varphi(s,\ j+1,\ k-i,\ m). \qquad (16)$$

Подставляя в это уравнение $j=n$, меняя k от 1 до $m-1$ и используя (14б) при $k=m-1$, находим значение $\varphi(s,\ n,\ 1,\ m)$ и далее все значения $\varphi(s,\ n,\ k,\ m)$, $k=\overline{1,\ m-1}$, а при помощи (14в) находим $\varphi(n,\ 0)$. Аналогично поступаем и для $j=n-1$. Меняя k от 1 до $m-1$, находим все значения $\varphi(s,\ n-1,\ k,\ m)$, $k=\overline{0,\ m}$ и т. д.

Аналогично модели 1 систему уравнений (14) преобразуем относительно средних значений времени решения задачи при соответствующем состоянии ВС — $T(j, k, m)$, т. е.

$$a_{0j}(0)\,T(j, k+1, m) = A_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1}[b_{ij}(0)\,T(j+1, k-i, m) +$$
$$+ c_{ij}(0)\,T(j, k-i+1, m)] - a_{1j}(0)\,T(j+1, k, m) -$$
$$- d_{kj}(\alpha_j)\,T(j+1, 0, m) - b_{0j}(0)\,T(j, 1, m) + T(j, k, m); \quad (17)$$
$$T(j, 0, m) = B_j + f_j(\alpha_j)\,T(j+1, 0, m) + l_j(0)\,T(j, 1, m);$$
$$T(j, m, m) - T(j, m-1, m) = 1/\nu;\ k = \overline{1, m-1};\ j = \overline{1, n},$$

где $a_{1j}(0)$, $d_{kj}(\alpha_j)$, $a_{0j}(0)$, $b_{ij}(0)$, $c_{ij}(0)$, $l_j(0)$ — значения при $s=0$ величин, приведенных в (15), а $a'_{1j}(0)$, $d'_{kj}(\alpha_j)$, $a'_{0j}(0)$, $b'_{ij}(0)$, $c'_{ij}(0)$, $l'_j(0)$ — соответствующие значения производных этих величин;

$$A_{kj} = a'_{1j}(0) + d'_{kj}(\alpha_j) + a'_{0j}(0) + b'_{0j}(0) + \sum_{i=1}^{k-1}\left[b'_{ij}(0) + c'_{ij}(0)\right];$$
$$T(j, k, m) = -\,|\,s\varphi(s, j, k, m)\,|'_{s=0};\quad B_j = -f'_j(\alpha_j) - l'_j(0).$$

Граничные условия имеют вид

$$T(n+1, k, m) = -\,|\,s\varphi(s, n+1, k, m)\,|'_{s=0},\quad k = \overline{0, m}. \quad (18)$$

Система (17) с граничными условиями (15) решается аналогично системе (14), поэтому ее решение здесь приводить не будем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Ю. К. Производительность при наличии двух типов отказов.— В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму. Т. 2. М.— Л., «Энергия», 1964.
2. Микадзе И. С., Шелегия Р. С. К вопросу осуществимости выполнения заданий на УВМ с учетом ее надежности.— «Сообщения АН ГССР», 1970, т. 60, № 3.
3. Черкесов Г. Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. М., «Сов. радио», 1974.
4. Королюк В. С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний.— «УМЖ», 1965, № 3, с. 123.
5. Гнеденко Б. В. О ненагруженном дублировании.— «Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн.», 1964, № 4, с. 3—12.
6. Гнеденко Б. В. О дублировании с восстановлением.— «Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн.», 1964, № 5, с. 111—118.
7. Зохель С., Халиль. Об одной задаче резервирования с восстановлением».— «EIK», 1968, Bd 4, S. 327—340.
8. Микадзе И. С., Шелегия Р. С. Об одной задаче неполного резервирования с восстановлением.— «Сообщения АН ГССР» 1970, № 3, с. 58.