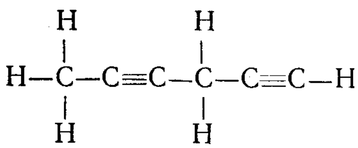
5) 

Пример 3. v_0:6C4, 3H1, 1A1, 1B1, 1D1. Построено около 6680 мультиграфов за время менее 10 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Разников В. В. Автоматическое построение полного набора структурных формул изомеров соединения определенного элементарного состава молекул и веса.— «Структурная химия», 1970, т. 11, № 2, с. 357—360.
2. Горфинкель М. И., Дробышев Ю. П., Ильина Л. Е., Нехорошев С. А., Коптюг В. А. Построение полного набора возможных структурных формул для исследуемого соединения по заданному набору фрагментов с помощью ЭВМ.— «Тезисы Конференции по автоматизации научных исследований на основе применения ЭЦВМ. Вычислительные комплексы, обслуживающие научный эксперимент». Новосибирск, изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1972.
3. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, «Наука», 1969.
4. Dubois J.-E. Ordered chromatic graph and limited environment concept (chapter of "Chemical Applications of graph theory". London, Academic Press, 1976).
5. Нехорошев С. А., Коптюг В. А. Построение полного набора возможных структурных формул исследуемого соединения по заданному набору фрагментов с помощью ЭВМ.— «Изв. СО АН СССР. Сер. химическая», 1975, вып. 6, с. 66—71.
6. Арлазаров В. М., Зуев П. П., Усков А. В., Фараджев И. А. Алгоритм приведения конечных неориентированных графов к каноническому виду.— «Журн. ВМ и МФ», 1974, т. 14, № 3, с. 737—743.

Поступила в редакцию 27 июня 1976 г.

УДК 681.3 : 519.2

И. С. МИКАДЗЕ

(Тбилиси)

ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ДВУХМАШИННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТИПА С УЧЕТОМ ЕЕ НАДЕЖНОСТИ

Рассмотрим вычислительную систему (ВС) параллельного типа, состоящую из двух самостоятельных вычислительных машин (ВМ) и решающую одну большую задачу. Необходимость решения задач большого объема, как известно [1], исключительно велика. К таким задачам относятся, например, решение динамической системы для предсказания погоды, нахождение сбалансированной экономики, проблемы газодинамики и т. д. Объединение ВМ в единую систему особенно эффективно при решении информационно-поисковых задач и задач управления промышленными и научными объектами. При этом повышается надежность решения и уменьшается время его реализации.

Данная работа посвящена определению вероятностной характеристики производительности ВС параллельного типа, состоящей из двух независимых идентичных ВМ с учетом их надежности. Предполагается, что объем вычислений, необходимый для решения заданной большой задачи, является случайной величиной; программа решения разбита на две независимые части, решаемые на отдельных ВМ. С целью оптимальной организации вычислительного процесса каждая часть программы со своей стороны разделена соответственно на n и m последовательных этапов [2—4], время выполнения которых является независимой случайной величиной, одинаково распределенной по показательному закону с интенсивностью μ. Потоки отказов ВМ подчинены закону Пуассона, а время восстановления — показательному закону с интенсивностями соответственно λ и γ. Предполагается, что ВМ отказывают только в процессе решения задачи. Правильность работы ВМ проверяется аппаратурным способом, который мгновенно обнаруживает неисправность. Контроль принят идеальным. При появлении отказа в одной из ВМ происходит потеря времени на повторение искаженного этапа и на восстановление отказавшей ВМ. Каждая ВМ заканчивает обработку своей части задачи независимо от того, находится вторая ВМ в ремонте или нет, после чего начинается обработка оставшихся этапов второй части задачи, если не закончилось восстановление отказавшей ВМ, с повторением искаженного этапа. Время, необходимое для перехода на обработку другой части задачи, если вторая ВМ отказала, не учитывается. ВС обслуживается одной ремонтной бригадой. Принято, что если обе ВМ одновременно окажутся в ремонте, то раньше вышедшая из ремонта ВМ продолжит решение первой части зада-

Процесс решения задачи на ВС рассматривается как полумарковский процесс с конечным количеством состояний [5, 6] и вводится $\Phi_{jk}^{\alpha\beta}$ — функция распределения вероятности того, что решение задачи ВС закончится за время, меньшее t, если решение первой части задачи начнется с j-го этапа, а второй — с k-го этапа при следующих состояниях ВМ в начале временного интервала $0 \div t$:

$$\alpha\beta = \begin{cases} 00 \text{ — обе ВМ исправны, } 01 \text{ — ремонтируется вторая ВМ,} \\ 10 \text{ — ремонтируется первая ВМ, } 11 \text{ — ремонтируются обе ВМ.} \end{cases}$$

С помощью обычных вероятностных рассуждений получим для $\Phi_{jk}^{\alpha\beta}(t)$ следующую систему интегральных уравнений:

$$\Phi_{jk}^{00}(t) = \int_0^t \left[\mu\left(\Phi_{j+1,k}^{00}(t-u) + \Phi_{j,k+1}^{00}(t-u)\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\Phi_{ik}^{10}(t-u) + \Phi_{jk}^{01}(t-u)\right)\right] \exp\{-2(\mu+\lambda)u\}\,du;$$

$$\Phi_{jk}^{10}(t) = \int_0^t \left[\gamma\Phi_{jk}^{00}(t-u) + \mu\Phi_{j,k+1}^{10}(t-u) + \lambda\Phi_{jk}^{11}(t-u)\right] \times$$

$$\times \exp\{-(\mu+\lambda+\gamma)u\}\,du;$$

$$\Phi_{jk}^{01}(t) = \int_0^t \left[\gamma\Phi_{jk}^{00}(t-u) + \mu\Phi_{j+1,k}^{01}(t-u) + \lambda\Phi_{jk}^{11}(t-u)\right] \times$$

$$\times \exp\{-(\mu+\lambda+\gamma)u\}\,du;$$

$$\Phi_{jk}^{11}(t) = \int_0^t \gamma\Phi_{jk}^{01}(t-u)\exp\{-\gamma u\}\,du;$$

$$\Phi_{n+1,k}^{00}(t) = \int_0^t \left[\mu\Phi_{n+1,k+1}^{00}(t-u) + \lambda\Phi_{n+1,k}^{01}(t-u)\right] \exp\{-(\mu+\lambda)u\}\,du;$$

$$\Phi_{j,m+1}^{00}(t) = \int_0^t \left[\mu\Phi_{j+1,m+1}^{00}(t-u) + \lambda\Phi_{j,m+1}^{10}(t-u)\right] \exp\{-(\mu+\lambda)u\}\,du;$$

$$\Phi_{n+1,k}^{01}(t)=\int_0^t\left[\mu\Phi_{n+1,k+1}^{01}(t-u)+\gamma\Phi_{n+1,k}^{00}(t-u)+\right.$$
$$\left.+\lambda\Phi_{n+1,k}^{11}(t-u)\right]\exp\{-(\mu+\lambda+\gamma)u\}\,du;$$
$$\Phi_{j,m+1}^{10}(t)=\int_0^t\left[\mu\Phi_{j+1,m+1}^{10}(t-u)+\gamma\Phi_{j,m+1}^{00}(t-u)+\right.$$
$$\left.+\lambda\Phi_{j,m+1}^{11}(t-u)\right]\exp\{-(\mu+\lambda+\gamma)u\}\,du;$$
$$\Phi_{n+1,k}^{11}(t)=\int_0^t\gamma\Phi_{n+1,k}^{01}(t-u)\exp\{-\gamma u\}\,du;$$
$$\Phi_{j,m+1}^{11}(t)=\int_0^t\gamma\Phi_{j,m+1}^{01}(t-u)\exp\{-\gamma u\}\,du,\quad j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m},$$

где $\Phi_{j,m+1}^{\alpha\beta}(t)$ и $\Phi_{n+1,k}^{\alpha\beta}(t)$ — функции распределения вероятности того, что одна из ВМ закончила обработку своей части и остается закончить обработку оставшихся этапов другой части, начиная с j-го или k-го этапа соответственно при определенных состояниях ВМ ($\alpha\beta=00, 01, 10, 11$). Граничными условиями являются

$$\Phi_{n+1,m+1}^{00}(t)=\Phi_{n+1,m+1}^{01}(t)=\Phi_{n+1,m+1}^{10}(t)=1.$$

Применив к приведенной системе интегральных уравнений преобразование Лапласа — Стилтьеса, получим

$$p_1\varphi_{jk}^{00}(s)=\mu\left(\varphi_{j+1,k}^{00}(s)+\varphi_{j,k+1}^{00}(s)\right)+\lambda\left(\varphi_{jk}^{10}(s)+\varphi_{jk}^{01}(s)\right);$$
$$p_2\varphi_{jk}^{10}(s)=\gamma\varphi_{jk}^{00}(s)+\mu\varphi_{j,k+1}^{10}(s)+\lambda\varphi_{jk}^{11}(s);$$
$$p_2\varphi_{jk}^{01}(s)=\gamma\varphi_{jk}^{00}(s)+\mu\varphi_{j+1,k}^{01}(s)+\lambda\varphi_{jk}^{11}(s);$$
$$p_3\varphi_{jk}^{11}(s)=\gamma\varphi_{jk}^{01}(s);\quad p_4\varphi_{n+1,k}^{00}(s)=\mu\varphi_{n+1,k+1}^{00}(s)+\lambda\varphi_{n+1,k}^{01}(s);$$
$$p_4\varphi_{j,m+1}^{00}(s)=\mu\varphi_{j+1,m+1}^{00}(s)+\lambda\varphi_{j,m+1}^{10}(s);$$
$$p_2\varphi_{n+1,k}^{01}(s)=\mu\varphi_{n+1,k+1}^{01}(s)+\gamma\varphi_{n+1,k}^{00}(s)+\lambda\varphi_{n+1,k}^{11}(s);$$
$$p_2\varphi_{j,m+1}^{10}(s)=\mu\varphi_{j+1,m+1}^{10}(s)+\gamma\varphi_{j,m+1}^{00}(s)+\lambda\varphi_{j,m+1}^{11}(s);$$
$$p_3\varphi_{n+1,k}^{11}(s)=\gamma\varphi_{n+1,k}^{01}(s);\quad p_3\varphi_{j,m+1}^{11}(s)=\gamma\varphi_{j,m+1}^{01}(s);$$
$$\varphi_{n+1,m+1}^{00}(s)=\varphi_{n+1,m+1}^{01}(s)=\varphi_{n+1,m+1}^{10}(s)=\frac{1}{s},\quad j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m},$$

где

$$\varphi_{jk}^{\alpha\beta}=\int_0^\infty e^{-st}\Phi_{jk}^{\alpha\beta}(t)\,dt;\quad p_1=s+2(\mu+\lambda);$$
$$p_2=s+\mu+\lambda+\gamma;\ p_3=s+\gamma;\ p_4=s+\mu+\lambda.$$

В результате решения последней системы уравнений получим $\varphi_{11}^{\alpha\beta}(s)$, т. е. операторное выражение функции распределения вероятности выполнения задания за время t, если выполнение задания ВС начнется с начальных ($j=1$, $k=1$) этапов при соответствующем ее состоянии. Однако для практического применения важным является знание среднего значения времени выполнения задания в указанных условиях, поэтому с учетом $\left|s\varphi_{jk}^{\alpha\beta}(s)\right|_{s=0}=1$ и $\left|s\varphi_{jk}^{\alpha\beta}(s)\right|'_{s=0}=T_{jk}^{\alpha\beta}$ можно написать:

$$\begin{aligned}&2(\mu+\lambda)T_{jk}^{00}=1+\mu\left(T_{j+1,k}^{00}+T_{j,k+1}^{00}\right)+\lambda\left(T_{jk}^{01}+T_{jk}^{10}\right);\\&(\mu+\lambda+\gamma)T_{jk}^{10}=1+\gamma T_{jk}^{00}+\mu T_{j,k+1}^{10}+\lambda T_{jk}^{11};\\&(\mu+\lambda+\gamma)T_{jk}^{01}=1+\gamma T_{jk}^{00}+\mu T_{j+1,k}^{01}+\lambda T_{jk}^{11};\end{aligned}\tag{1}$$

$$\gamma T^{11}_{jk} = 1 + \gamma T^{01}_{jk}; \quad (\mu + \lambda) T^{00}_{n+1,k} = 1 + \mu T^{00}_{n+1,k+1} + \lambda T^{01}_{n+1,k};$$

$$(\mu + \lambda) T^{00}_{j,m+1} = 1 + \mu T^{00}_{j+1,m+1} + \lambda T^{10}_{j,m+1};$$

$$(\mu + \lambda + \gamma) T^{01}_{n+1,k} = 1 + \mu T^{01}_{n+1,k+1} + \gamma T^{00}_{n+1,k} + \lambda T^{11}_{n+1,k};$$

$$(\mu + \lambda + \gamma) T^{10}_{j,m+1} = 1 + \mu T^{10}_{j+1,m+1} + \gamma T^{00}_{j,m+1} + \lambda T^{11}_{j,m+1};$$

$$\gamma T^{11}_{n+1,k} = 1 + \gamma T^{01}_{n+1,k}; \quad \gamma T^{11}_{j,m+1} = 1 + \gamma T^{01}_{j,m+1};$$

$$T^{00}_{n+1,m+1} = T^{01}_{n+1,m+1} = T^{10}_{n+1,m+1} = 0, \; j = \overline{1,n}; \; k = \overline{1,m}.$$

В результате ряда преобразований систему (1) относительно T^{00}_{jk}

где $$A_{jk} = 1 + \lambda \Big[a_j^{(n)} - \frac{1}{\gamma} + b_j^{(n)} T^{01}_{n+1,k} + c_k^{(m)} + d_k^{(m)} T^{10}_{j,m+1} +$$

$$+ \lambda c_0 \sum_{\rho=k}^{m} d_0^{\rho-k} \left(a_j^{(n)} + b_j^{(n)} T^{01}_{n+1,\rho} \right) \Big];$$

$$T^{00}_{n+1,k} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \sum_{i=k+1}^{m} [\mu B_{i-k-1} - (\mu + \gamma) B_{i-k}] D_i^{(m)} - (\mu + \gamma) D_k^{(m)} - \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \right\};$$

$$T^{00}_{j,m+1} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \sum_{i=j+1}^{n} [\mu B_{i-j-1} - (\mu + \gamma) B_{i-j}] D_i^{(n)} - (\mu + \gamma) D_j^{(n)} - \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} \right\};$$

$$T^{10}_{j,m+1} = - \sum_{i=j}^{n} D_i^{(n)} B_{i-j}; \quad T^{01}_{n+1,k} = - \sum_{i=k}^{m} D_i^{(m)} B_{i-k};$$

$$B_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} A_k B_{i-k-1}, \quad i = 2, 3, \ldots; \; B_0 = 1;$$

$$A_1 = \frac{\gamma\lambda + (\mu + \lambda)^2}{(\mu + \lambda)(\mu + \lambda + \gamma)}; \quad A_k = \frac{\gamma\lambda}{\mu (\mu + \lambda + \gamma)} \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^k, \quad k = 2, 3, \ldots;$$

$$D_i^{(l)} = - \frac{\gamma (\mu + \lambda)}{\mu (\mu + \lambda + \gamma)} \left[\frac{(2b_1)^{l-i+1} - 1}{2b_1 - 1} \, \frac{2b_1}{\mu} + \frac{\lambda + \gamma}{\gamma^2} \right];$$

$$b_1 = \frac{\mu}{2 (\mu + \lambda)}; \quad a_0 = \frac{\gamma}{\mu + \gamma}; \quad b_0 = \frac{\mu}{\mu + \gamma};$$

$$b_j^{(n)} = b_0^{n-j+1}; \quad a_j^{(n)} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\lambda + \gamma}{\gamma^2} \left(b_j^{(n)} - 1 \right);$$

$$d_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda + \gamma}; \quad c_0 = \frac{1}{\mu + \lambda + \gamma}; \quad d_k^{(m)} = d_0^{m-k+1};$$

$$c_k^{(m)} = - \frac{d_0^{m-k+1} - 1}{\lambda + \gamma}.$$

Система (2) представляет рекуррентную систему уравнений, поэтому последовательно, начиная с $j=n$ и $k=m$, находим все значения T^{00}_{jk} $(j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m})$, как, например,

$$2 (\mu + \lambda) T^{00}_{nm} = A_{nm} + \mu \left(T^{00}_{n+1,m} + T^{00}_{n,m+1} \right) + N T^{00}_{nm};$$

$$2 (\mu + \lambda) T^{00}_{n-1,m} = A_{n-1,m} + \mu \left(T^{00}_{nm} + T^{00}_{n-1,m+1} \right) + N T^{00}_{n-1,m} + M T^{00}_{nm};$$

$$2 (\mu + \lambda) T^{00}_{n,m-1} = A_{n,m-1} + \mu \left(T^{00}_{n+1,m-1} + T^{00}_{nm} \right) + N T^{00}_{n,m-1} + L T^{00}_{nm};$$

$$2(\mu+\lambda)T^{00}_{n-1,m-1}=A_{n-1,m-1}+\mu\left(T^{00}_{n,m-1}+T^{00}_{n-1,m}\right)+$$
$$+NT^{00}_{n-1,m-1}+MT^{00}_{n,m-1}+LT^{00}_{n-1,m}+KT^{00}_{nm},$$

где

$$\lambda[a_0(1+\lambda c_0)+\gamma c_0]=N;\quad \lambda(1+\lambda c_0)a_0b_0=M;$$
$$\lambda(\gamma+\lambda a_0)c_0d_0=L;\ a_0b_0c_0d_0\lambda^2=K,$$

и, продолжая вычисление, при заданных значениях n и m определяем T^{00}_{11}, а воспользовавшись первыми тремя уравнениями системы (1) — T^{10}_{11}, T^{01}_{11} и T^{1}_{11}, т. е. среднее время решения задачи при ее соответствующем состоянии в момент начала решения задачи (обе ВМ исправны, одна из них или обе ВМ находятся в ремонте).

Аналогично может быть найдено время решения задачи двухмашинной ВС, когда программа ее решения не может быть представлена состоящей из двух независимых частей, а разбивается на несколько параллельно-последовательных частей. Распределение вероятности времени решения каждой параллельной или последовательной части находим вышеприведенным способом. При этом вероятности распределения времени решения каждой последующей части с учетом состояний ВМ, входящих в ВС, являются соответствующими граничным условиям для предыдущей части.

В заключение отметим, что знание среднего времени решения задачи, заданной двухмашинной ВС с учетом ее надежности, имеет важное практическое значение для правильного выбора основных параметров в процессе ее проектирования, а также для оптимальной организации вычислительного процесса (соответствующим выбором значений n и m) в период ее эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поспелов Д. А. Введение в теорию вычислительных систем. М., «Сов. радио», 1972.
2. Черкесов Г. Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. М., «Сов. радио», 1974.
3. Микадзе И. С., Шелегия Р. С. К вопросу осуществимости выполнения заданий на УВМ с учетом ее надежности.— «Сообщения АН ГССР», 1970, № 3, с. 60.
4. Микадзе И. С. К вопросу определения производительности вычислительной машины, входящей в систему обработки данных.— «Сообщения АН ГССР», 1976, № 3, с. 81.
5. Королюк В. С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний.— «УМЖ», 1965, № 3, с. 123.
6. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. Ж., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию 21 июля 1976 г.;
окончательный вариант — 31 декабря 1976 г.