должен через неопределенное время; параметры заданной функции или она сама могут быть изменены простыми командами.

В отличие от цифровых вычислительных машин описанное устройство оперирует не кодами, а последовательностями импульсов. Этим объясняется сравнительно небольшая скорость вычислений. Например, при частоте 10 МГц генератора тактовых импульсов, коэффициенте деления делителя $Д_Q$, равном 128, и цифровом аналоге аргумента в счетчике $Сч_Q$, равном 10^4, время вычисления круговых, эллиптических и гиперболических функций будет измеряться десятыми долями секунды. Однако если решается задача воспроизведения функции $y=a\sqrt{x}$, то 10^4 последовательных значений этой функции могут быть получены за время, в несколько раз меньшее, чем на ЭВМ серии ЕС.

Особенности устройства должны учитываться при планировании его использования. С хорошим эффектом оно может включаться в информационно-измерительные системы для промежуточной обработки информации. Имеется пример реализации системы измерения и регистрации в протоколе (машинка МПУ16-3) и на ленте перфоратора ПЛ-150 значений давления в 120 точках газового тракта изделий. В этой системе используются вибрационные датчики (ПДВ) с существенно нелинейной характеристикой, и с целью получения результатов измерений в физических единицах в систему включен вычислитель, построенный на основе описанного в настоящей работе устройства.

Из схемы и описания работы устройства видно, что оно без трудностей может быть спроектировано в виде модуля в стандарте САМАС. Однако при этом должно быть принято решение стратегического характера относительно объема модуля: дело в том, что некоторые дополнения к схеме позволят с помощью устройства (модуля) выполнять операции суммирования квадратов чисел, извлечения корня из суммы квадратов, воспроизведения и вычисления полиномов второй степени и извлечения корней из них, решения квадратных уравнений и некоторые другие.

*Поступила в редакцию 5 февраля 1976 г.;
окончательный вариант — 26 декабря 1976 г.*

УДК 519.28.669

Г. М. МАРГОЛИН
(Ленинград)

ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПЛАНА МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель многих экспериментов в научных исследованиях состоит в нахождении зависимости между некоторой выходной (зависимой) переменной y и независимыми переменными $x_i (i=1, \ldots, q)$, которые варьируются в процессе эксперимента. Распространенным методом нахождения зависимости $y=\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_q)$ является регрессионный анализ экспериментальных данных [1, 2]. Суть регрессионного анализа состоит в аппроксимации неизвестной функциональной зависимости $y=\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_q)$ некоторой моделью, в частном случае линейной по параметрам b_i функцией

$$y=\sum_{i=0}^{K-1} b_i f_i(x), \tag{1}$$

которая называется кривой (поверхностью) регрессии, и нахождении параметров b_i этой модели. Отметим, что поверхность регрессии (1) —

линейна только по параметрам b_i, а исследуемые факторы x_i могут входить в модель нелинейно в зависимости от вида функции $f_i(x)$.

При отыскании подходящей регрессионной модели в однофакторных экспериментах обычно стремятся использовать ортогональные функции $f_i(x)$:

$$\sum_{l=1}^{N} f_i(x_l) f_p(x_l) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq p, \tag{2}$$

где x_l — значение независимой переменной в l-м эксперименте, N — число экспериментов.

Коэффициенты b_i при этом рассчитываются по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{l=1}^{N} f_i(x_l) y_l}{\sum_{l=1}^{N} |f_i(x_l)|^2} = \frac{\{F^{\mathrm{T}} Y\}_i}{\sum_{l=1}^{N} |f_i(x_l)|^2}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{Y}$ — вектор-столбец размера $(N \times 1)$, состоящий из значений зависимой переменной y_l в каждом эксперименте, $\boldsymbol{F}$ — матрица размера $(N \times K)$, i-й столбец которой состоит из значений функции $f_i(x)$ в каждом из N экспериментов, а число столбцов K равно числу членов в модели (1).

При многофакторных экспериментах более рационален выбор ортогонального плана. Известно, что при ортогональном плане эксперимента из того же объема экспериментальных данных извлекается максимальное количество информации [1]. Известны ортогональные планы для некоторых сочетаний числа независимых факторов x_i и числа уровней квантования этих факторов (в основном двухуровневые планы) [3]. Нами предлагается метод построения ортогонального плана эксперимента при произвольном числе факторов q и произвольном количестве m уровней квантования этих факторов на основе дискретных функций Виленкина — Крестенсона (В—К) [4]. Широко распространенные двухуровневые планы на основе функций Уолша являются частным случаем предлагаемых планов.

Функции В—К могут быть записаны в следующем виде:

$$H_h(p) = \exp\left[j \left(\frac{2\pi}{m} \sum_{i=1}^{q} h_i p_i \right) \right], \tag{4}$$

где h — номер дискретной функции В—К; p — номер значения дискретной функции В—К; m, q — целые положительные числа; h_i, p_i — разрядные коэффициенты в m-ичном представлении чисел h и p.

Покажем возможность использования функций В—К при планировании эксперимента. Напомним сначала, что при числе факторов q и квантовании каждого фактора на m уровней полный факторный эксперимент включает $N = m^q$ экспериментальных точек. Приведем теперь некоторые свойства функций В—К.

1. Система из $N = m^q$ функций В—К является полной, т. е. любая N-мерная дискретная функция может быть разложена по системе функций В—К.

2. Функции В—К являются m-значными дискретными функциями.

3. Функции В—К ортогональны на интервале определения N:

$$\sum_{i=1}^{N} H_h(i) H_l(i) = 0 \quad \text{при} \quad h \neq l. \tag{5}$$

4. Система функций В—К является мультипликативной, т. е. произведения и степени функций тоже принадлежат этой системе.

Последнее свойство обеспечивает не только ортогональность плана эксперимента, но и ортогональность всех членов регрессионной модели высших порядков при использовании в качестве столбцов плана эксперимента q функций В—К. Поясним, как нужно выбирать эти q функций. Для этого воспользуемся представлением функций В—К в виде произведения обобщенных функций Радемахера $R_i(p)$, которые рассматриваются на том же интервале $N=m^q$ и определяются выражением [4]

$$R_i(p)=\exp[j(2\pi/m)p_i], \tag{6}$$

где $R_i(p)$—p-е значение i-й функции Радемахера, p_i — разрядный коэффициент в m-ичном представлении числа p. Поскольку m-ичное представление числа p при $p\leqslant N=m^q$ содержит q разрядов, формулу (4) с учетом (6) можно переписать в виде

$$H_h(p)=\prod_{i=1}^{q}[R_i(p)]^{h_i}=[R_1(p)]^{h_1}\ldots[R_q(p)]^{h_q}.$$

Следовательно, в качестве q исходных функций, образующих план эксперимента, следует выбирать функции В—К, совпадающие с обобщенными функциями Радемахера. Количество таких функций равно q и их номера h в m-ичном представлении содержат один ненулевой и равный 1 разряд.

Особенность применения предлагаемого плана эксперимента состоит в том, что функции В—К, как и функции Радемахера, являются комплексными функциями, т. е. описываются двумя действительными функциями. Однако, учитывая, что модуль каждого значения функций В—К и Радемахера равен 1, однозначно задание только фазы (разумеется, в пределах $0\div2\pi$). Таким образом, при проведении эксперимента по предлагаемому плану уровни каждого фактора следует выбирать согласно значениям фазы соответствующей функции Радемахера. При этом в случае разложения действительной функции y в ряд по комплексным функциям поверхность регрессии (1) следует записать в виде

$$y=\operatorname{Re}\sum_{i=0}^{K-1}b_if_i(x). \tag{1a}$$

Формула (3) для расчета коэффициентов b_i справедлива и для случая комплексных функций $f_i(x)$.

В заключение в качестве примера рассмотрим построение ортогонального плана и матрицу $\boldsymbol{F}$ из функций Виленкина — Крестенсона для двухфакторного эксперимента ($q=2$) при трехуровневом квантовании ($m=3$) каждого фактора. В этом случае число экспериментальных точек $N=m^q=9$ и матрица $\boldsymbol{F}$, элементы которой рассчитываются по формуле (4), имеет вид

$$\boldsymbol{F}=\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix}\text{Номера}\\ \text{экспери-}\\ \text{ментов}\end{matrix}\\
\begin{Vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & 1 & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & 1 & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ}\\
1 & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & 1 & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & 1 & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ}\\
1 & 1 & 1 & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{-j120^\circ}\\
1 & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & 1 & e^{-j120^\circ} & 1 & e^{j120^\circ}\\
1 & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & 1 & e^{-j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & 1\\
1 & 1 & 1 & e^{-j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ}\\
1 & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & 1 & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & 1\\
1 & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{-j120^\circ} & e^{j120^\circ} & 1 & e^{j120^\circ} & 1 & e^{-j120^\circ}
\end{Vmatrix} & \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{matrix}
\end{array}$$

f_0	$f_1(x_1)$	f_1^2	$f_2(x_2)$	f_1f_2	$f_1^2f_2$	f_2^2	$f_1f_2^2$	$f_1^2f_2^2$	Члены модели	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	10-ичный	Номера
00	01	02	10	11	12	20	21	22	m-ичный	членов

Матрица плана эксперимента состоит из значений фазы обобщенных функций Радемахера (2-й и 4-й столбцы матрицы F) и с точностью до постоянного множителя равна

Номер эксперимента	Независимые переменные x_1	x_2
0	0	0
1	1	0
2	−1	0
3	0	1
4	1	1
5	−1	1
6	0	−1
7	1	−1
8	−1	−1

ВЫВОДЫ

Предложен метод построения ортогонального плана многофакторного эксперимента при произвольном числе m уровней квантования каждого фактора. План обеспечивает ортогональность матрицы при подборе регрессионных моделей, число членов которых $K \leqslant m^q$, где q — число независимых факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М., «Мир», 1973.
2. Худсон Д. Статистика для физиков. М., «Мир», 1970.
3. Налимов В. В., Голикова Т. И. Логические основания планирования эксперимента. М., «Металлургия», 1976.
4. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М., «Сов. радио», 1975.

Поступила в редакцию 10 мая 1977 г.

УДК 519.1

Ю. П. ДРОБЫШЕВ, Э. М. СОКОЛОВА, С. П. СОКОЛОВ
(Новосибирск)

О СИНТЕЗЕ НЕИЗОМОРФНЫХ МУЛЬТИГРАФОВ

Рассматривается задача синтеза полного множества неизоморфных связных мультиграфов на конечном множестве именованных вершин с заданными степенями. Подобная задача возникает, в частности, в органической химии при построении возможных структурных формул по заданному набору структурных фрагментов. Прямое решение этой задачи путем построения всех возможных мультиграфов и последующего