УДК 53.085.215

В. М. ЕФИМОВ, А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ
(*Новосибирск*)

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РЕГИСТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

На качество регистрации изображений влияет значительное число факторов. Ниже рассматривается идеальная в некотором смысле модель регистрации, учитывающая лишь принципиально неустранимые факторы: статистический характер происходящих при регистрации процессов и конечные размеры апертуры считывающего устройства. Будем считать, что ошибки регистрации обусловлены: флуктуациями светового поля объекта, преобразованием в детекторе светового сигнала в случайную дискретную последовательность фотоотсчетов и обратным преобразованием этой последовательности в непрерывный сигнал устройством считывания конечной апертуры.

Модель объекта. В качестве модели объекта будем рассматривать нестационарное случайное световое поле (аналитический сигнал) $v_f(x, y, t)$ с функцией взаимной когерентности**

$$\Gamma_f(x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2) = \langle v_f(x_1, y_1, t_1)\, v_f^*(x_2, y_2, t_2)\rangle. \tag{1}$$

Ограничимся световыми полями, для которых

$$\Gamma_f(x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2) = [f(x_1, y_1, t_1) f(x_2, y_2, t_2)]^{1/2}\Gamma(x_1-x_2, y_1-y_2, t_1-t_2). \tag{2}$$

В выражении (2) $f(x, y, t)$ — скалярный множитель $(0 \leqslant f(x, y, t) \leqslant 1)$, $\Gamma(x_1-x_2, y_1-y_2, t_1-t_2)$ — функция взаимной когерентности стационарного случайного светового поля $v(x, y, t)$.

Нестационарное световое поле $v_f(x, y, t)$ с функцией взаимной когерентности (2) можно рассматривать как результат амплитудной модуляции скалярной функцией $(f(x, y, t))^{1/2}$ стационарного светового поля $v(x, y, t)$, т. е.

$$v_f(x, y, t) = (f(x, y, t))^{1/2} v(x, y, t). \tag{3}$$

Введенной моделью удобно описывать следующие ситуации. При равномерном освещении сцены отношение интенсивности $I_f(x, y, t)$ отраженного света к интенсивности I падающего

$$\Gamma_f(x, y, t, x, y, t)/\Gamma(x, y, t, x, y, t) = I_f(x, y, t)/I = f(x, y, t). \tag{4}$$

При равномерном освещении полупрозрачных транспарантов интенсивность поля на выходе транспаранта также описывается соотношением (4).

В рассмотренных ситуациях функция $f(x, y, t)$ передает «смысловое» содержание сцены (транспаранта), не зависящее от уровня ее

---

* Материалы статьи докладывались на Советско-американском семинаре по оптической обработке информации (Новосибирск, 10—16 июля 1976 г.), Советско-французском симпозиуме по оптико-спектральным приборам и приборам для обработки изображений (Москва, 8—11 сентября 1976 г.), семинаре Научного совета по проблемам электрических измерений и измерительных информационных систем (Москва, 16 марта 1977 г.). См. также Ефимов В. М., Искольдский А. М. Влияние вероятностного характера процесса детектирования и флуктуаций светового поля на качество фотоприема.— Препринт № 36, Новосибирск, изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1976.

** В выражении (1) знаком * обозначена комплексно-сопряженная величина, знак ⟨ ⟩ означает статистическое усреднение по ансамблю реализаций светового поля.

освещенности. Отсюда следует, что характеристикой объекта (сцены, транспаранта) является не столько интенсивность $I_f(x, y, t)$ нестационарного поля $v_f(x, y, t)$, сколько функция $f(x, y, t)$.

В такой постановке объект представляет собой модулирующую функцию $f(x, y, t)$. Нас будут интересовать ошибки измерения функции $f(x, y, t)$, которую в дальнейшем для простоты будем называть транспарантом.

Так как детектор реагирует не на транспарант, а на мгновенную интенсивность поля

$$v_f(x, y, t)\, v_f^*(x, y, t) = f(x, y, t)\, v(x, y, t)\, v^*(x, y, t), \tag{5}$$

то наличие множителя $v(x, y, t)v^*(x, y, t)$ приводит к возникновению составляющей случайной ошибки в определении транспаранта. Эта составляющая обусловлена флуктуациями интенсивности опорного светового поля $v(x, y, t)$. Другая составляющая случайной ошибки порождается вероятностным характером процесса детектирования.

Детектирование. Рассмотрим процесс детектирования оптического сигнала на плоском фотокатоде. В этом случае поток рождающихся фотоэлектронов можно рассматривать как дискретный сигнал $z(x, y, t)$, представляющий собой совокупность дельта-функций:

$$z(x, y, t) = \sum \delta(x - x_i, y - y_i, t - t_i), \tag{6}$$

где x_i, y_i — пространственные координаты точки рождения i-го фотоэлектрона, t_i — момент его возникновения.

Обычно постулируется, что реакция фотокатода на конкретную реализацию светового поля $v_f(x, y, t)$ является нестационарным пуассоновским случайным потоком фотоотсчетов (фотоэлектронов) с интенсивностью

$$\lambda(x, y, t) = \alpha_I v_f(x, y, t)\, v_f^*(x, y, t) = \alpha_I f(x, y, t)\, v(x, y, t)\, v^*(x, y, t), \tag{7}$$

где α_I — характеризует чувствительность фотокатода. При этом число фотоэлектронов n, рожденных в пространственно-временном объеме V:

$$n = \int_V z(x, y, t)\, dxdydt, \tag{8}$$

является случайным и имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda = \int_V \lambda(x, y, t)\, dxdydt, \tag{9}$$

т. е. распределение числа фотоотсчетов в объеме V:

$$p(n) = (\Lambda^n/n!)\exp(-\Lambda). \tag{10}$$

Рассмотрим простейшие характеристики числа фотоотсчетов n при конкретной реализации светового поля $v(x, y, t)$. Из (10) следует, что среднее число фотоотсчетов

$$\langle n\rangle = \Lambda, \tag{11}$$

а средний квадрат этого числа

$$\langle n^2\rangle = \Lambda^2 + \Lambda. \tag{12}$$

В соотношениях (11) и (12) знак $\langle\,\rangle$ означает усреднение по всем возможным реализациям случайного дискретного сигнала $z(x, y, t)$ при фиксированной реализации волнового поля. В действительности мы обязаны рассматривать статистику n по отношению к ансамблю реализации волнового поля и провести усреднение интересующих нас параметров по этому ансамблю.

Используя выражения (7), (9) и (11), получим

$$\langle\langle n\rangle\rangle = \langle\Lambda\rangle = \alpha_I \int \langle v(x, y, t)\, v^*(x, y, t)\rangle f(x, y, t)\, dxdydt. \qquad (13)$$

Из (13) следует, то среднее число фотоотсчетов, рождающихся в объеме V, пропорционально интегралу от транспаранта в пределах этого объема.

Средний квадрат числа фотоотсчетов

$$\langle\langle n^2\rangle\rangle = \left[\alpha_I I \int\limits_V f(x, y, t)\, dxdydt\right]^2 + \alpha_I I \int\limits_V f(x, y, t)\, dxdydt +$$
$$+ \alpha_I^2 \int\limits_V f(x_1, y_1, t_1) f(x_2, y_2, t_2)\, \sigma_I^2 \rho_I (x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2) \times$$
$$\times dx_1 dy_1 dt_1 dx_2 dy_2 dt_2, \qquad (15)$$

где σ_I^2 — дисперсия интенсивности опорного поля $v(x, y, t)$, а $\rho_I(x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2)$ — нормированная корреляционная функция интенсивности.

Для дисперсии числа фотоотсчетов из (14) и (15) вытекает соотношение

$$\langle\langle n^2\rangle\rangle - \langle\langle n\rangle\rangle^2 = \alpha_I I \int\limits_V f(x, y, t)\, dxdydt + \alpha_I^2 \sigma_I^2 \int\limits_V f(x_1, y_1, t_1) f(x_2, y_2, t_2) \times$$
$$\times \rho_I (x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2)\, dx_1 dy_1 dt_1 dx_2 dy_2 dt_2. \qquad (16)$$

Второе слагаемое (16) обусловлено флуктуациями интенсивности опорного поля, первое — вероятностным характером процесса детектирования.

Восстановление транспаранта. Из (14) следует, что при любом характере статистики опорного поля, среднее число фотоотсчетов, рождающихся в объеме V, пропорционально интегралу от транспаранта в пределах этого объема. Поэтому если объем V выбрать таким образом, чтобы в его пределах транспарант практически не менялся, то в качестве оценки значения транспаранта в точке с координатами $\{x, y, t\}$ можно принять

$$\hat{f}(x, y, t) = n(x, y, t)/\alpha V, \qquad (17)$$

где $\alpha = \alpha_I I$ — интенсивность потока фотоотсчетов, соответствующая $f(x, y, t) = 1$, а зарегистрированное в объеме V число фотоотсчетов

$$n(x, y, t) = \int z(\xi, \eta, \tau)\, w(x - \xi, y - \eta, t - \tau)\, d\xi d\eta d\tau. \qquad (18)$$

В интеграле свертки весовая функция

$$w(x - \xi, y - \eta, t - \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x - \xi, y - \eta, t - \tau \in V; \\ 0, & \text{если} \quad x - \xi, y - \eta, t - \tau \overline{\in} V \end{cases} \qquad (19)$$

выбрана таким образом, чтобы этот интеграл совпадал с числом фотоотсчетов, попавших в объем V с центром в точке $\{x, y, t\}$.

Реализующий оценку (17) алгоритм восстановления транспаранта в любой точке области V_0 существования транспаранта может быть осуществлен следующим образом: вначале идеальный регистратор фиксирует без ошибок координаты места и время рождения каждого фотоотсчета в области V_0, затем производится непрерывное сканирование области V_0 апертурой V и подсчитывается число фотоотсчетов, попавших в пределы апертуры, результат сканирования в соответствии с (17) нормируется на величину, равную среднему числу частиц в апертуре при $f(x, y, t)=1$.

Ошибки измерения. Вероятностный характер рассматриваемых процессов и принятая процедура восстановления, необходимая для того, чтобы «измерить» $f(x, y, t)$, приводят к возникновению ошибки

$$\varepsilon(x, y, t)=\hat{f}(x, y, t)-f(x, y, t), \tag{20}$$

в которой естественно выделить систематическую и случайную составляющие.

Систематическая ошибка $\varepsilon_0(x, y, t)$ возникает из-за несовпадения среднего значения оценки (17)*

$$\langle\hat{f}(x,y,t)\rangle=\langle n(x,y,t)\rangle/\alpha V=\int f(\xi,\eta,\tau)\,[w(x-\xi,\,y-\eta,\,t-\tau)/V]\,d\xi d\eta d\tau \tag{21}$$

со значением транспаранта и обусловлена сглаживающим действием считывающей апертуры:

$$\varepsilon_0(x, y, t)=\langle\varepsilon(x, y, t)\rangle=\langle\hat{f}(x, y, t)\rangle-f(x, y, t). \tag{22}$$

Случайная ошибка $\overset{\circ}{\varepsilon}(x, y, t)$ возникает из-за флуктуаций числа фотоотсчетов в считывающей апертуре и равна отклонению оценки (17) относительно ее среднего:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}(x, y, t)=\varepsilon(x, y, t)-\langle\varepsilon(x, y, t)\rangle=\hat{f}(x, y, t)-\langle\hat{f}(x, y, t)\rangle. \tag{23}$$

Для оценки качества измерения транспаранта используем интегральный средний квадрат ошибки

$$\langle\varepsilon^2\rangle=(1/V_0)\int\limits_{V_0}\langle\varepsilon^2(x,y,t)\rangle\,dxdydt. \tag{24}$$

В соответствии с (22) и (23) интегральный средний квадрат ошибки можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\langle\varepsilon_0^2\rangle+\langle\sigma^2\rangle, \tag{25}$$

где $\langle\varepsilon_0^2\rangle=(1/V_0)\int\limits_{V_0}\langle\varepsilon(x,y,t)\rangle^2\,dxdydt$ — интегральный квадрат систематической ошибки,

$$\langle\sigma^2\rangle=(1/V_0)\int\limits_{V_0}\langle\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2(x,y,t)\rangle\,dxdydt$$

— интегральная дисперсия случайной ошибки.

Введем интегральные характеристики транспаранта:

среднее значение

$$\langle f\rangle=(1/V_0)\int\limits_{V_0}f(x,y,t)\,dxdydt, \tag{26}$$

средний квадрат

$$\langle f^2\rangle=(1/V_0)\int\limits_{V_0}f^2(x,y,t)\,dxdydt, \tag{27}$$

«дисперсию»

$$\sigma_f^2=\langle f^2\rangle-\langle f\rangle^2 \tag{28}$$

---

* Здесь и далее второй знак усреднения опускается.

и «корреляционную функцию»

$$\rho_f(\xi, \eta, \tau) = \left(1/\sigma_f^2\right)\left[\int\limits_{V_0} f(x, y, t)\, f(x+\xi, y+\eta, t+\tau)\, dxdydt - \langle f\rangle^2\right]. \quad (29)$$

Тогда интегральный квадрат систематической ошибки

$$\langle\varepsilon_0^2\rangle = \sigma_f^2\left[1 - 2\int \rho_f(\xi, \eta, \tau)\,[w(\xi, \eta, \tau)/V]\, d\xi d\eta d\tau + \right.$$
$$\left. + \int \rho_f(\xi, \eta, \tau)\,[w_0(\xi, \eta, \tau)/V^2]\, d\xi d\eta d\tau\right], \quad (30)$$

где $w_0(\xi, \eta, \tau)$ — свертка весовой функции считывающего устройства с самой собой:

$$w_0(\xi, \eta, \tau) = \int w(x, y, t)\, w(x+\xi. y+\eta, t+\tau)\, dxdydt. \quad (31)$$

Пренебрегая, далее, при вычислении дисперсии случайной ошибки изменениями транспаранта в пределах апертуры (см. (16)), получим соотношение для интегральной дисперсии случайной ошибки

$$\langle\sigma^2\rangle = (1/\alpha V)\langle f\rangle + \left(\sigma_I^2/I^2\right)\langle f^2\rangle \int \rho_I(\xi, \eta, \tau)\,[w_0(\xi, \eta, \tau)/V^2]\, d\xi d\eta d\tau. \quad (32)$$

Второе слагаемое (32) обусловлено флуктуациями интенсивности опорного поля, первое — вероятностным механизмом рождения фотоотсчетов.

Оптимальная апертура. Поведение систематической и случайной ошибок как функций апертуры V различно. При $V\to 0$ величина $\langle\varepsilon_0^2\rangle\to 0$, так как функции $w(\xi, \eta, \tau)/V$ и $w_0(\xi, \eta, \tau)/V^2$ стремятся к дельта-функциям. При малых V

$$\langle\varepsilon_0^2\rangle \sim V^m, \quad (33)$$

где показатель степени m зависит от свойств транспаранта. Например, если $\rho_f(\xi, \eta, \tau)$ зависит только от «расстояния»

$$r = [(\xi/\Delta_x)^2 + (\eta/\Delta_y)^2 + (\tau/\Delta_t)^2]^{1/2}, \quad (34)$$

т. е.

$$\rho_f(\xi, \eta, \tau) = \rho_f(r), \quad (35)$$

где Δ_x, Δ_y, Δ_t — некоторые размеры, характеризующие динамику изменения транспаранта по соответствующим координатам, то в качестве апертуры V естественно взять эллипсоид, оси которого Δx, Δy и Δt выбраны пропорциональными характерным размерам:

$$\Delta x/\Delta_x = \Delta y/\Delta_y = \Delta t/\Delta_t. \quad (36)$$

При этом для дважды и более раз дифференцируемых транспарантов $m=4/3$, для однократно дифференцируемых — $m=1$, для недифференцируемых — $m=1/3$.

В отличие от систематической случайная ошибка убывает с ростом апертуры V. Первое слагаемое (32) убывает обратно пропорционально величине $\alpha V = \langle N\rangle$ — среднему числу фотоотсчетов, возникающих в пределах апертуры под действием опорного поля. Величина второго слагаемого (32) зависит от соотношения между апертурой V и «корреляционным объемом» V_I флуктуаций интенсивности опорного поля

$$V_I = \int \rho_I(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau. \quad (37)$$

Если $V \ll V_I$, то это слагаемое пропорционально относительной дисперсии флуктуаций интенсивности σ_I^2/I^2* (в этом случае функцию

* Для теплового источника (гауссовского опорного поля) $\sigma_I^2/I^2 = 1$.

$w_0(\xi, \eta, \tau)/V^2$ можно рассматривать как дельта-функцию по отношению к $\rho_I(\xi, \eta, \tau)$). При $V \gg V_I$ оно пропорционально величине $(\sigma_I^2/I^2)(V_I/V)$ (в этом случае функцию $\rho_I(\xi, \eta, \tau)/V_I$ можно рассматривать как дельта-функцию по отношению к $w_0(\xi, \eta, \tau)/V^2$).

Таким образом, при $V \ll V_I$

$$\langle\sigma^2\rangle = (1/\alpha V)\langle f\rangle + (\sigma_I^2/I^2)\langle f^2\rangle, \tag{38}$$

а при $V \gg V_I$

$$\langle\sigma^2\rangle = (1/\alpha V)\langle f\rangle + (\sigma_I^2/I^2)(V_I/V)\langle f^2\rangle. \tag{39}$$

Располагая априорными сведениями об интегральных свойствах транспаранта и статистических характеристиках флуктуаций интенсивности опорного поля, можно выбрать апертуру V из условия минимума $\langle\varepsilon^2\rangle$. Для случая (39) при оптимальном выборе апертуры выполняется соотношение

$$\langle\sigma^2\rangle/\langle\varepsilon_0^2\rangle = m. \tag{40}$$

Это, на первый взгляд, не соответствует эмпирическому принципу равных вкладов, при котором апертуру следует выбирать из условия

$$\langle\sigma^2\rangle/\langle\varepsilon_0^2\rangle = 1. \tag{41}$$

Однако анализ показывает, что относительное увеличение $\langle\varepsilon^2\rangle$ при использовании для выбора апертуры условия (41) вместо (40) составляет $2m^{m/m+1}/(m+1)$. Эта величина в широком диапазоне значений m близка к единице.

Предельная точность измерения. Выше была рассмотрена ошибка измерения транспаранта при весовой функции $w(\xi, \eta, \tau)$, постоянной внутри апертуры V. Для весовой функции произвольного вида при использовании оценки (21)

$$V = \int w(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau. \tag{42}$$

Соотношение для $\langle\varepsilon_0^2\rangle$ остается прежним (см. (30)), а для случайной составляющей изменится (см. (32)):

$$\langle\sigma^2\rangle = (1/\alpha)\langle f\rangle \int w^2(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau \Big/ \left[\int w(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau\right]^2 + \\ + (\sigma_I^2/I^2)\langle f^2\rangle \int \rho_I(\xi, \eta, \tau)\, w_0(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau \Big/ \left[\int w(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau\right]^2, \tag{43}$$

где $w_0(\xi, \eta, \tau)$ — по-прежнему свертка весовой функции с самой собой (см. (31)). Поэтому в соотношениях (38) и (39) объем V следует заменить на эффективный объем весовой функции

$$V_w = \left[\int w(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau\right]^2 \Big/ \int w^2(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau. \tag{44}$$

При этом альтернативный характер поведения систематической и случайной составляющих ошибок сохраняется. Вообще, при линейной фильтрации, т. е. использовании оценок типа (21), интегральный средний квадрат ошибки измерения не может быть меньше, чем

$$\langle\varepsilon^2\rangle = \int \{\sigma_f^2\widetilde{\rho}_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t)(1/\alpha)\langle f\rangle / [\sigma_f^2\widetilde{\rho}_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t) + \\ + (1/\alpha)\langle f\rangle\ ]\}\, d\omega_x d\omega_y d\omega_t + (\sigma_I^2/I^2)\langle f^2\rangle \tag{45}$$

для когерентного опорного поля (см. (38)) и

$$\langle\varepsilon^2\rangle = \int \{\sigma_f^2\widetilde{\rho}_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t)\left[(1/\alpha)\langle f\rangle + (\sigma_I^2/I^2)\, V_I\langle f^2\rangle\right] / [\sigma_f^2\widetilde{\rho}_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t) + \\ + (1/\alpha)\langle f\rangle + (\sigma_I^2/I^2)\, V_I\langle f^2\rangle]\}\, d\omega_x d\omega_y d\omega_t \tag{46}$$

7*

для некогерентного опорного поля (см. (39)). В (45) и (46) $\tilde{\rho}_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t)$ — преобразование Фурье от ρ_f (ξ, η, τ), т. е. «спектральная плотность» транспаранта.

Из соотношений (45) и (46) вытекает принципиальная невозможность сколь угодно точного измерения транспаранта. Для того чтобы (45) обратилось в нуль, в качестве опорного источника должен быть использован «идеальный» лазер $\left(\sigma_I^2/I^2 = 0\right)$ бесконечной мощности ($\alpha = \alpha_I I = \infty$). Равенство нулю (46) возможно лишь при наличии полностью некогерентного источника ($V_I = 0$) также бесконечной мощности.

Поступила в редакцию 10 мая 1977 г.

УДК 681.325.57.01 : 51

В. Н. ИВАНОВ, Н. Н. КОЧКИН

(Краснодар)

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Существует определенный тип арифметических устройств [1—3], выполняющих оптическим путем операцию перемножения двоичных чисел. В качестве оптических аналогов этих чисел используются плоские амплитудные фильтры, представляющие собой совокупность участков с коэффициентами пропускания 0 или 1, каждый из которых однозначно связан с определенным разрядом отождествляемого двоичного числа. Двоичные числа представляются фактически в виде однорядных матриц, и арифметические устройства [1—3] производят операцию их перемножения.

Оказывается, что перемножение пары двоичных чисел можно рассматривать как реализацию математической операции прямого произведения однорядных матриц при условии строго упорядоченного следования разрядов в них. В данной статье обобщается задача перемножения множества пар двоичных чисел, представляемых квадратными матрицами.

Рассмотрим две однорядные матрицы:

$$A = \{a_i\} = (a_1 a_2 \ldots a_n), \quad B = \{b_k\} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть a_i, $b_k \in \{0, 1\}$. Матрицы такого типа отображают двоичные числа, если связать с каждым элементом их цифру определенного разряда. Договоримся, что элемент, индекс которого максимален, представляет собой самый младший разряд числа, а элементы a_1 и b_1 — самый старший. В строке разряды следуют, как обычно, справа налево, а в столбце — снизу вверх. В виду того что перед последней значащей цифрой числа можно написать любое количество незначащих нулей, будем рассматривать матрицы одного размера.

Дадим определение операции прямого произведения матриц. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \{b_{kl}\} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$