

31. Buerger M. J.—“Proc. Nat. Acad. Sci.” (USA), 1941, vol. 27, p. 117.
32. Buerger M. J.—“Proc. Nat. Acad. Sci.” (USA), 1950, vol. 36, p. 330.
33. Hanson A. W., Taylor C. A. and Lipson H.—“Nature”, 1951, vol. 168, p. 160.
34. Hanson A. W. and Lipson H.—“Acta Cryst.”, 1952, vol. 5, p. 362.
35. Lipson H. and Taylor C. A. X-Ray crystal structure determination as a branch of physical optics.—In: Progress in Optics. Vol. 5. Edited by Wolf E. Amsterdam, North Holland, 1966.
36. Lipson H. S., Editor. Optical transforms. N. Y., Academic Press, 1972.
37. Chaudhuri B., p. 71—113 in ref. [36].
38. Thompson B. J. The information content of optical diffraction patterns, p. 313—346 in ref. [4].
39. Taylor C. A. and Lipson H. Optical transforms— their preparation and application to X-Ray diffraction problems. Ithaca, N. Y., Cornell University Press, 1964.
40. Stroke G. W. and Halioua M. Optical foundation of digital communication and information processing, p. 281—312 in ref. [4].
41. Stroke G. W., Halioua M., Sarma R. and Srinivasan V. A hybrid optical-digital method for 3-D structure synthesis in X-Ray crystallography.—“J. Mol. Biol.” (in print).
42. Stroke G. W., p. 89—96 in ref. [6a] and Gabor D. et al in ref. [29].
43. Stroke G. W., Halioua M. and Indebetouw G.—“Phys. Lett.”, 1970, vol. 31 A, p. 341.
44. Stroke G. W., Halioua M., Indebetouw G. and Poisson F.—“Opt. Commun.”, 1970, vol. 1, p. 355.
45. Misell D. L., Stroke G. W. and Halioua M.—“J. Phys. D: Appl. Phys.”, 1974, vol. 7, p. L113.
46. Andrews H. C.—“Appl. Opt.”, 1976, vol. 15, p. 495.

Поступила в редакцию 26 июля 1976 г.

УДК 518 : 519.2

В. ПРАТТ

(Лос-Анджелес, США)

ПСЕВДОИНВЕРСНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ *

Введение. Цифровые методы обработки широко применяются для восстановления размытых и зашумленных изображений [1]. Трудности возникают из-за большой размерности реальных изображений. Большая размерность приводит не только к увеличению времени обработки, но и к неустойчивости численного решения. Исследования последнего времени были направлены на разработку эффективных вычислительных алгоритмов, которые позволяют сократить время вычисления и преодолеть неустойчивость численного решения. Пратт и Давариан [2] предложили быстрый алгоритм для псевдоинверсного восстановления изображений, который дает значительное сокращение времени. Эндриус и Паттерсон [3—6] ввели разложение матриц по собственным векторам (SVD) как средство для выполнения псевдоинверсного восстановления изображений. С помощью этого метода путем последовательной процедуры восстановления можно избежать вредного влияния неустойчивости численного решения. Однако для вычислений необходимо большое время. В данной статье описывается быстрый SVD-алгоритм для восстановления изображения.

Псевдоинверсное восстановление изображений. Процесс формирования размытого изображения при наличии аддитивного шума моделируется системой

$$g = Bf + n, \quad (1)$$

* Материалы статьи докладывались на Советско-американском семинаре по оптической обработке информации (Новосибирск, 10—16 июля 1976 г.).

где g — M -мерный вектор наблюдаемого изображения; f — N -мерный вектор точек поля идеального изображения; B —матрица размытия размерности $M \times N$, элементами которой являются отсчеты функции импульсного отклика; n — M -мерный вектор, соответствующий аддитивному шуму. В большинстве моделей предполагается, что шаг выборки в функциях g и f один и тот же.

В статье рассматриваются пространственно-инвариантные системы, поэтому матрица B —Теплица. Ради простоты изложения нами рассматривается одномерный случай. (Распространение быстрого алгоритма вычисления на двумерный случай выполняется просто.) При этих условиях матрица B принимает вид

$$B = \begin{bmatrix} h(L) & \dots & h(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(L) & \dots & h(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h(L) & \dots & \dots & h(1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

где h — L -мерный вектор точек импульсного отклика. Следует отметить, что эта система недоопределена ($N=M+L-1$).

Оценка для f дается выражением

$$\hat{f} = B^- g, \quad (3)$$

где B^- обозначает обобщенное обращение матрицы B , которое обеспечивает восстановление изображения с минимальной среднеквадратической ошибкой. Если B —матрица ранга M , то обобщенное обращение представляется формулой

$$B^- = B^T (BB^T)^{-1}. \quad (4)$$

Для вычисления B^- были разработаны алгоритмы, требующие выполнения порядка N^3 операций. Быстрый псевдоинверсный алгоритм [2] основан на рассмотрении присоединенной модели

$$q_E = C f_E + n_E, \quad (5a)$$

где расширенные векторы q_E , f_E и n_E определяются выражением

$$J - M \begin{bmatrix} q \\ \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_T \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ J - K \end{matrix} + \begin{bmatrix} n_T \\ \bar{0} \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

Вектор f_T состоит из K центральных значений вектора f идеального изображения, где $K=N-2(L-1)$, а C —циркулянтная матрица вида

$$C = \begin{bmatrix} h(1) & 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & \dots & h(2) \\ & h(2) & h(1) & & & & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & h(L) & h(L-1) & & & & & h(L) \\ 0 & & h(L) & & & & & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & h(1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Вектор q совпадает с наблюдаемым изображением на его R центральных элементах, где $R=M-2$ ($L-1$). Внешние элементы q можно аппроксимировать согласно [2]:

$$q \approx \tilde{q} = Wg \quad (7)$$

(W — «окошечная» матрица). Объединяя уравнения (5) и (7), для оценки \hat{f}_T получаем

$$\hat{f}_E = C^{-1} \tilde{q}_E \quad (8a)$$

в соответствии с

$$J - K \left\{ \begin{array}{c} \hat{f}_T \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} C^{-1} & \tilde{q} \\ \hline & 0 \end{array} \right]. \quad (8b)$$

Здесь C^{-1} — обратная матрица для циркулянтной матрицы C .

Восстановление может быть также выполнено с помощью преобразования Фурье. Если через A обозначить матрицу преобразования Фурье, то уравнение (8a) можно переписать в виде

$$\hat{f}_E = A^{-1} D^{-1} [A \tilde{q}_E], \quad (9)$$

где матрица

$$D = ACA^{-1} \quad (10a)$$

и обратная ей

$$D^{-1} = AC^{-1}A^{-1} \quad (10b)$$

оказываются диагональными матрицами, так как C и C^{-1} циркулянтны. Элементы матрицы D можно представить (см. [2]) в виде

$$D = \text{diag}[h_E(1), \dots, h_E(J)], \quad (11)$$

где

$$\left[\begin{array}{c} h_E \\ \dots \\ \dots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & \tilde{h} \\ \hline & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L \\ J - L \end{array} \quad (12)$$

Используя быстрый алгоритм псевдообращения, операцию вычисления оценки по уравнениям (8) можно заменить парой одномерных преобразований Фурье и J скалярными операциями умножения-сложения. Выигрыш в вычислении обычно составляет до 1000:1!

Восстановление изображения SVD методом. Матрицу B из уравнения (1) можно разложить в произведение

$$B = U \Lambda^{1/2} V^T, \quad (13)$$

где U и V — унитарные матрицы, состоящие из собственных векторов матрицы BB^T и $B^T B$ соответственно, а Λ — диагональная матрица, элементы которой содержат собственные значения матриц BB^T и $B^T B$. Поскольку U и V — унитарные, обобщенные обращения для выражения (13) можно записать непосредственно как

$$B^{-1} = V \Lambda^{-1/2} U^T \quad (14)$$

и

$$\hat{f} = B^{-1} g = V \Lambda^{-1/2} U^T g. \quad (15)$$

Для вычисления оценки из уравнения (15) требуется $N^2 + N$ операций умножения и сложения.

Благодаря ортогональности матриц U и V матрицу B можно представить в виде ряда

$$B = \sum_{i=1}^{R_B} \lambda_i^{1/2} u_i v_i^T, \quad (16)$$

где λ_i — диагональные элементы матрицы Λ , u_i и v_i — i -е столбцы соответственно матриц U и V , а R_B — ранг матрицы B . Обобщенное обращение для B можно также записать в виде ряда

$$B^{-1} = \sum_{i=1}^{R_B} \lambda_i^{-1/2} v_i u_i^T. \quad (17)$$

Следовательно, оценку для \hat{f} можно выразить как

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{R_B} \lambda_i^{-1/2} v_i u_i^T g. \quad (18)$$

Уравнение (18) можно преобразовать с тем, чтобы получить возможность последовательно оценивать \hat{f} :

$$\hat{f}_k = \hat{f}_{k-1} + \lambda_k^{-1/2} (u_k^T g) v_k \quad (19)$$

при $1 \leq k \leq T$, где T — число членов, входящих в разложение. Преимущество последовательной формулировки заключено в том, что можно ограничить разложение до того значения λ_i , при котором появится неустойчивость. Главная трудность последовательного алгоритма — большое количество вычислений.

Быстрый SVD алгоритм. Метод псевдоинверсии можно применить непосредственно к присоединенной модели уравнения (5). Пусть

$$C = X \Delta^{1/2} Y^{*T}, \quad (20)$$

где X и Y — унитарные матрицы, которые определяются из соотношений:

$$X(C C^T) X^{*T} = \Delta, \quad (21a)$$

$$Y(C^T C) Y^{*T} = \Delta. \quad (21b)$$

Так как C — циркулянта, то и $C C^T$ — тоже циркулянта. Вследствие этого X и Y должны быть эквивалентны матрице Фурье-преобразования A (или A^{-1}), поскольку матрица Фурье выполняет диагонализацию циркулянтной матрицы. Пусть $X = Y = A^{-1}$. Тогда собственные векторы $x_i = y_i$, которые являются строками матриц X и Y , фактически являются комплексными экспоненциальными базисными функциями Фурье-преобразования, т. е.

$$x_k^*(j) = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{J} (k-1)(j-1) \right\}. \quad (22)$$

Легко показать, что

$$\Delta = D D^{*T}, \quad (23)$$

где $D = A C A^{-1}$ вычисляется из уравнений (11) и (12).

Тогда в соответствии с уравнением (15) оценка расширенного вектора идеального изображения выражается в виде

$$\hat{f}_E = Y \Delta^{-1/2} X^{*T} \tilde{q}_E \quad (24a)^*$$

или

$$\hat{f}_E = A^{-1} \Delta^{-1/2} A \tilde{q}_E. \quad (246)$$

Следует отметить, что уравнение (246) точно совпадает с процедурой псевдообращения в фурье-области, определяемой уравнением (9). Вычисление оценки по уравнению (246) при использовании быстрого преобразования Фурье (БПФ) требует $J \log J$ операций для прямого и обратного Фурье-преобразований плюс J скалярных умножений. Всего требуется $J(1+2 \log_2 J)$ операций. Выражение для оценок можно записать в виде ряда непосредственно из уравнения (18):

$$\hat{f}_E = \sum_{i=1}^{R_C} \delta_i^{-1/2} x_i^* x_i^T \tilde{q}_E, \quad (25)$$

где R_C — ранг матрицы C . Последовательная оценка, согласно уравнению (18), принимает вид

$$\hat{f}_{E_k} = \hat{f}_{E_{k-1}} + \delta_k^{-1/2} [x_k^T \tilde{q}_E] x_k^* \quad (26)$$

для $1 \leq k \leq T$, где T представляет число членов, используемых в разложении. Использование БПФ для предварительного вычисления произведения $[x_k^T \tilde{q}_E]$ дает в результате $TJ(1+\log_2 J)$ операций, требуемых для вычисления. Можно добиться большей эффективности вычисления в случае такого удачного разделения ряда пополам, чтобы элемент, вызывающий неустойчивость, не достигался. Тогда потребуются около $J \log_2 J(1+\log_2 J)$ операций.

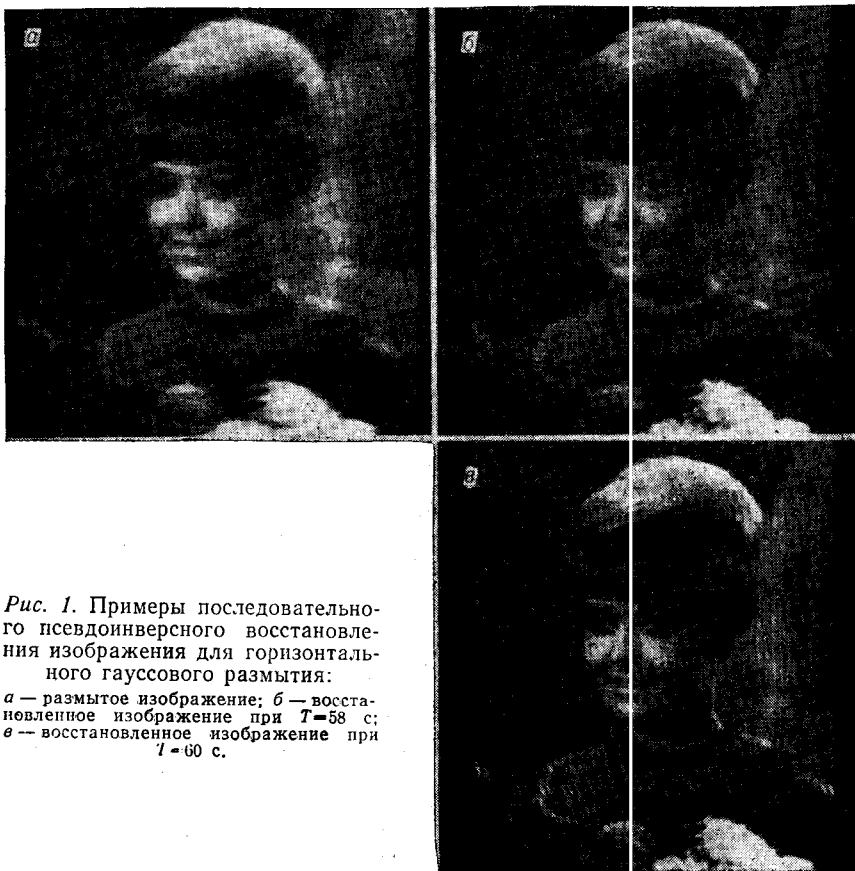


Рис. 1. Примеры последовательного псевдоинверсного восстановления изображения для горизонтального гауссового размытия:

а — размытое изображение; б — восстановленное изображение при $T=58$ с;
в — восстановленное изображение при $T=60$ с.

Быстрый модифицированный алгоритм. Оценку по уравнениям (24) и (25) можно выразить в эквивалентной форме

$$\hat{f}_{ET} = A^{-1} \Delta_T^{-1/2} A \tilde{q}_E, \quad (27)$$

где

$$\Delta_T^{-1/2} = \begin{bmatrix} \delta_1^{-1/2} & & & & 0 \\ & \delta_2^{-1/2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \delta_T^{-1/2} & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

обеспечивает усечение высокочастотных членов псевдоинверсного оператора в фурье-области. В качестве альтернативного варианта можно, например, заменить диагональные нулевые элементы единицей или, возможно, некоторой последовательностью, которая уменьшается при увеличении частоты.

Результаты экспериментов. Рис. 1 иллюстрирует применение модифицированного быстрого метода псевдоинверсного восстановления изображения. Размытое изображение создавалось путем моделирования на ЭВМ нерезкости по горизонтали с помощью импульсного отклика вида

$$h(l) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{l - \left(\frac{L+1}{2} \right)}{\sigma_b} \right]^2 \right\}, \quad (29)$$

где σ_b — стандартное отклонение; L — длина импульсного отклика. Восстановление выполнялось по уравнению (26), в котором $J-T$ нулевых члена вдоль диагонали заменялись на $\sigma_T^{-1/2}$. Из анализа восстановленных изображений очевидно, что при $\sigma_b=3$, $L=23$ существует резкий переход качества восстановления при переходе от $T=58$ до $T=60$.

Пример восстановления расфокусированного и зашумленного изображений приведен на рис. 2, а, б. Снимок представляет кристалл металла, полученный с помощью электронного микроскопа. Импульсная функция представлялась функцией Гаусса с $b=11$ и $\sigma_l=2$.



Рис. 2. Примеры SVD псевдоинверсного восстановления для гауссового размытия при $\sigma_b=2$, $L=11$, $J=256$, включая инверсное квадратичное ослабление собственных изображений высшего порядка.

ВЫВОДЫ

Представлен новый класс вычислительных алгоритмов для псевдоинверсного восстановления изображений. Эти алгоритмы позволяют избежать неустойчивости численных решений. С их помощью восстановление размытых и зашумленных изображений возможно даже при очень плохой обусловленности матрицы размытия. Вычислительные алгоритмы требуют выполнения над размытым изображением двумерного преобразования Фурье с последующим скалярным взвешиванием коэффициентов преобразования, после чего выполняется обратное двумерное преобразование Фурье для того, чтобы воспроизвести восстановленное изображение. При использовании этих алгоритмов возможна экономия в вычислениях в несколько тысяч раз по сравнению с обычными алгоритмами, использующими псевдоинверсию матриц. При использовании в электронных или электрооптических приборах параллельного преобразования Фурье возможен еще больший выигрыш.

Выражаю признательность господину Икраму Абду из Института обработки изображений Южной Калифорнии за помощь, оказанную в подготовке экспериментальной части этого доклада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sondhi M. M. Image restoration: the removal of spatially invariant degradations.— "Proc. of the IEEE", 1972, vol. 60, N 7, p. 842—853.
2. Pratt W. K., Davarian F. Fast computational techniques for pseudoinverse and wiener image restoration.— "IEEE Trans. on Computers (to be published).
3. Andrews H. C., Patterson C. L. Outer product expansions and their uses in digital image processing.— "American Mathematical Monthly", 1975, vol. 1, N 82, p. 1—13.
4. Andrews H. C., Patterson C. L. Outer product expansions and their uses in digital image processing.— "IEEE Trans. on Computers" 1976, vol. C-25, N 2, p. 140—148.
5. Andrews H. C., Patterson C. L. Singular value decompositions and digital image processing.— "IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc.", 1976, vol. ASSP-24, N 1, p. 26—53.
6. Pratt W. K. Digital image processing. Wiley, N. Y., 1977.

Поступила в редакцию 26 июля 1976 г.

УДК 621.373.826 : 722.99

**И. С. ГИБИН, М. А. ГОФМАН, С. Ф. КИБИРЕВ,
Е. Ф. ПЕН, П. Е. ТВЕРДОХЛЕБ**

(Новосибирск)

ГОЛОГРАММНЫЕ ЗУ С ФУНКЦИЯМИ ПОИСКА ИНФОРМАЦИИ

Введение. В работе [1] описана функциональная модель ассоциативного оптического ЗУ с двухуровневой организацией памяти. Первый, основной уровень предназначен для хранения и адресной выдачи массивов данных, второй, признаковый уровень — для хранения описаний (признаков, ключевых слов) этих массивов и оперативного поиска их адресов по запросам пользователей. Поиск производится путем сравнения слова запроса с содержимым ячеек признаковой памяти, что связано с необходимостью вычисления многомерного (по числу ячеек) функционала «близости» и последующего принятия решения. Были определены основные виды функционалов, используемых