для некогерентного опорного поля (см. (39)). В (45) и (46) $\tilde{\rho}_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t)$ — преобразование Фурье от $\rho_f(\xi, \eta, \tau)$, т. е. «спектральная плотность» транспаранта.

Из соотношений (45) и (46) вытекает принципиальная невозможность сколь угодно точного измерения транспаранта. Для того чтобы (45) обратилось в нуль, в качестве опорного источника должен быть использован «идеальный» лазер $\left(\sigma_I^2/I^2 = 0\right)$ бесконечной мощности ($\alpha = \alpha_I I = \infty$). Равенство нулю (46) возможно лишь при наличии полностью некогерентного источника ($V_I = 0$) также бесконечной мощности.

Поступила в редакцию 10 мая 1977 г.

УДК 681.325.57.01 : 51

В. Н. ИВАНОВ, Н. Н. КОЧКИН

(Краснодар)

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Существует определенный тип арифметических устройств [1—3], выполняющих оптическим путем операцию перемножения двоичных чисел. В качестве оптических аналогов этих чисел используются плоские амплитудные фильтры, представляющие собой совокупность участков с коэффициентами пропускания 0 или 1, каждый из которых однозначно связан с определенным разрядом отождествляемого двоичного числа. Двоичные числа представляются фактически в виде однорядных матриц, и арифметические устройства [1—3] производят операцию их перемножения.

Оказывается, что перемножение пары двоичных чисел можно рассматривать как реализацию математической операции прямого произведения однорядных матриц при условии строго упорядоченного следования разрядов в них. В данной статье обобщается задача перемножения множества пар двоичных чисел, представляемых квадратными матрицами.

Рассмотрим две однорядные матрицы:

$$A = \{a_i\} = (a_1 a_2 \ldots a_n), \quad B = \{b_k\} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть $a_i, b_k \in \{0, 1\}$. Матрицы такого типа отображают двоичные числа, если связать с каждым элементом их цифру определенного разряда. Договоримся, что элемент, индекс которого максимален, представляет собой самый младший разряд числа, а элементы a_1 и b_1 — самый старший. В строке разряды следуют, как обычно, справа налево, а в столбце — снизу вверх. В виду того что перед последней значащей цифрой числа можно написать любое количество незначащих нулей, будем рассматривать матрицы одного размера.

Дадим определение операции прямого произведения матриц. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \{b_{kl}\} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Квадратная матрица C порядка n^2, определяемая по формуле

$$C = A \otimes B = \{a_{ij}B\} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \dots a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B \dots a_{2n}B \\ \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B \dots a_{nn}B \end{pmatrix},$$

называется их прямым произведением.

Элементы матрицы C получаются от перемножения каждого элемента матрицы A на каждый элемент матрицы B и нумеруются двумя парами индексов

$$C_{ik,\, jl} \equiv a_{ij}b_{kl}. \tag{3}$$

Здесь первая пара индексов (ik) нумерует строку матрицы C, а вторая пара индексов (jl) — ее столбец.

В случае умножения однорядных матриц элементы матрицы прямого произведения нумеруются одной парой индексов

$$C_{ik} \equiv a_i b_k,$$

а двоичные числа, отождествляемые с однорядными матрицами (1), могут быть записаны следующим образом:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}2^i, \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}2^k,$$

где a_i, $b_k \in \{0, 1\}$, и являются элементами матриц (1).

Рассмотрим произведение

$$AB = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{i+1}b_{k+1}2^{i+k}. \tag{4}$$

Очевидно, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 \dots a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 \dots a_nb_2 \\ \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n \dots a_nb_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

составленная из коэффициентов разложения произведения (4) по степеням 2, в точности совпадает с матрицей прямого произведения однорядных матриц (1). Как видно из (4), элементы этой матрицы, имеющие одинаковую сумму первого и второго индексов, представляют собой коэффициенты перед одной и той же степенью 2, следовательно, для получения цифры соответствующего разряда их необходимо просуммировать.

Таким образом, можно интерпретировать перемножение пары двоичных чисел как реализацию математической операции прямого произведения отображающих их однорядных матриц. Эта интерпретация справедлива при условии, что в матрицах-сомножителях вводится значение разряда, определяемое местом цифры соответствующего двоичного числа.

С позиций задач картинной логики представляет интерес возможность обобщения данной интерпретации на случай умножения множества пар двоичных чисел, представляемых в виде матриц. Рассмотрим две квадратные матрицы (2) порядка n. По аналогии с частным случаем (1) можно принять, что матрицы (2) отображают совокупность n пар двоичных чисел, имеющих одинаковое число разрядов. В соответствии с принятой формой упорядочения элементов будем считать, что n строк матрицы A представляют собой набор n двоичных чисел с разрядами, следующими справа налево, а n столбцов матрицы B — набор n двоичных чисел с разрядами, следующими снизу вверх. Оказывается, что перемножение множества пар двоичных чисел, отождествляемых с квадратными матрицами (2), сводится к выполнению операции прямого произведения отображающих матриц с последующим выделением из матрицы прямого произведения (по определенному алгоритму) информации о произведениях двоичных чисел.

Рассмотрим сущность предлагаемого метода на частном случае квадратных матриц второго порядка:

$$A=\{a_{ij}\}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\{b_{kl}\}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

которые отображают совокупность двух пар двухразрядных двоичных чисел, представляемых соответственно в виде строк матрицы A и столбцов матрицы B. Разряды в строках A следуют справа налево, а в столбцах B — снизу вверх.

Определим алгоритм выделения всевозможных искомых произведений данных пар двоичных чисел:

$$(a_{11}a_{12})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad (a_{11}a_{12})\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}, \quad (a_{21}a_{22})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad (a_{21}a_{22})\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \tag{7}$$

из матрицы прямого произведения матриц (6).

Как известно [4], совокупность пар индексов $\{(ik)\}$ называется лексикографически упорядоченной, если (ik) предшествует $(i'k')$ при условии $i<i'$; если же $i=i'$, то при условии $k<k'$. Пусть имеется два ряда лексикографически упорядоченных пар индексов:

$$\{(ik)\}=(11),\ (12),\ (21),\ (22);$$
$$\{(ki)\}=(11),\ (12),\ (21),\ (22).$$

Обозначим через $(jl)^*$ пару индексов, занимающих в ряде $\{(ik)\}$ то же положение, что и пара (lj) в ряде $\{(ki)\}$. В этом случае $(11)^*=(11)$, $(12)^*=(21)$, $(21)^*=(12)$, $(22)^*=(22)$.

Рассмотрим теперь прямое произведение матриц (6):

$$C=A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В соответствии с (3) каждый столбец и каждая строка этой матрицы нумеруются парой индексов. Столбцы (8) имеют соответственно номера (11), (12), (21), (22). Поменяв столбцы матрицы (8) местами по следующему правилу:

$$(11)\to(11)^*,\ (12)\to(12)^*,\ (21)\to(21)^*,\ (22)\to(22)^*,$$

получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ \hdashline a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{array}\right). \tag{9}$$

Разбивая эту матрицу на блоки размерностью 2×2 (т. е. порядка исходных матриц), как показано в (9), можно заметить, что каждый блок представляет собой прямое произведение одной из пар двоичных чисел (7) и, следовательно, имеется полная аналогия с уже рассмотренным случаем умножения однорядных матриц. Проводя в каждом блоке подиагональное суммирование элементов с одинаковыми разрядами, можно получить все возможные произведения пар двоичных чисел (6).

Для квадратных матриц произвольного размера последовательность действий точно такая же: реализуется операция прямого произведения; по описанному правилу производится перестановка столбцов; получаемая матрица разбивается, начиная с левого верхнего угла, на блоки, порядок которых определяется порядком исходных матриц-сомножителей, и, наконец, в пределах каждого блока производится подиагональное суммирование элементов с одинаковыми разрядами.

Помимо прямого произведения, из квадратных матриц (2) может быть образовано обычное произведение «строка на столбец»:

$$D = AB, \quad d_{ik} = \sum_{m=1}^{n} a_{im} b_{mk}. \tag{10}$$

В связи с этим представляет интерес то обстоятельство, что на основе рассмотренного метода можно указать вполне однозначный способ перехода от матрицы прямого произведения к произведению «строка на столбец» (10).

Последовательность действий при этом совершенно аналогична рассмотренной выше, с той лишь разницей, что вместо подиагонального суммирования в блоках необходимо заменить каждый из блоков на его след (т. е. сумму элементов, расположенных по главной диагонали). Осуществив эту процедуру, например для частного случая квадратных матриц второго порядка, вместо матрицы (9) получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{c:c} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \hdashline a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{array}\right),$$

которая представляет собой обычное произведение «строка на столбец» исходных матриц (6).

Отмеченная возможность привлекательна с той точки зрения, что реализовать операцию прямого произведения матриц-транспарантов оптоэлектронными или чисто оптическими средствами значительно легче, чем реализовывать непосредственно произведение «строка на столбец».

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. Н., Иванов Р. Ф. Использование оптических управляемых сред в арифметическом устройстве.— В кн.: Оптическая и электрооптическая обработка информации. М., «Наука», 1975, с. 153—157.
2. Иванов В. Н., Иванов Р. Ф., Яковенко Н. А. Оптическая обработка цифровой информации.— В кн.: Физико-технические вопросы кибернетики. Киев, изд. Ин-та кибернетики АН УССР, 1974, с. 88—97.
3. Иванов В. Н., Писаренко В. Ф., Иванов Р. Ф. Оптоэлектронное арифметическое устройство.— «Авт. свид-во, № 285350, БИ, 1970, № 33.
4. Мурнаган Ф. Теория представлений групп. М., ИЛ, 1950.

Поступила в редакцию 12 мая 1976 г.;
окончательный вариант — 3 марта 1977 г.