УДК 681.325 : 621.376

Ю. В. ЗАВОРУЕВ, И. Н. ТРОИЦКИЙ

(Москва)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ МАЛОМОЩНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При распознавании оптических изображений часто в качестве признаков используются коэффициенты разложения в обобщенный ряд Фурье распределения интенсивности регистрируемого изображения. Тогда одна из важных задач — определение требуемого числа этих коэффициентов. Обычно этот вопрос решается на основе анализа эффективности распознавания, в результате чего устанавливается то число признаков, при котором вероятностная мера пересечения распознаваемых классов оказывается не больше заданной.

Такой подход возможен в случае мощных оптических изображений, когда коэффициенты обобщенного ряда Фурье определяются достаточно точно. В противном случае увеличение числа коэффициентов Фурье приводит к увеличению информации о зарегистрированном изображении лишь до тех пор, пока это число не достигнет некоторого предела, после которого прирост информации нивелируется возрастанием флюктуационных ошибок. Цель настоящей работы — установить этот предел и получить общее выражение, позволяющее количественно оценить оптимальное число коэффициентов разложения маломощных изображений в обобщенный ряд Фурье.

В общем случае маломощное оптическое изображение описывается совокупностью координат $\{r_i\}=\{x_i, y_i\}$ $(i=1, \ldots n)$ случайных точек, в которых кванты света прореагировали с веществом светочувствительного экрана (для фотоэлектронного приемника r_i — координаты вылетевших фотоэлектронов, для магнитной пленки — координаты доменов, изменивших ориентацию и т. п.). При достаточно широких условиях [1, 2] эта совокупность случайных точек является пуассоновским потоком, так что вероятность зарегистрировать значения $r_1, \ldots, r_n$ задается выражением

$$P(r_1, \ldots, r_n, n/J(r)) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} J(r_i) \exp\left\{-\int J(r)\,dr\right\}, \qquad (1)$$

где $J(r)=J(x, y)$ — распределение интенсивности в наблюдаемом оптическом изображении, нормированное с учетом квантовой эффективности таким образом, что $\int J(r)\,dr = \int\limits_{\Omega}\int J(x, y)\,dx\,dy = \bar{n}$ (суммарному среднему числу актов взаимодействия квантов с веществом экрана по всей его области Ω и за все время наблюдения).

Таким образом, формально зарегистрированная реализация интенсивности может быть записана в виде

$$\hat{J}(r) = \sum_{i=1}^{n} I_i \delta(r - r_i),$$

где I_i — характеристики интенсивности прореагировавших центров, которые для простоты будем считать одинаковыми $(I_i=I_0)$. В силу нормировки $\int J(r)\,dr = \bar{n}$ значение I_0 равно 1.

Пусть для распознавания в качестве признаков взяты нормированные по площади коэффициенты a_k разложения интенсивности $J(r)$ в обобщенный ряд Фурье по ортогональным функциям $\varphi_k(r)$, так что $a_k = \frac{1}{S}\int J(r)\varphi_k(r)dr$ (S — площадь экрана Ω). Значения этих коэффициентов для зарегистрированной реализации $\hat{J}(r)$ равны $\hat{a}_k = \frac{1}{S}\int \hat{J}(r) \times \varphi_k(r)\,dr = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(r_i)$ и являются случайными величинами. Насколько информативна совокупность из N таких коэффициентов, можно судить по тому, как точно в среднем функция $\hat{J}(r) = \sum_{k=0}^{N}\hat{a}_k\varphi_k(r)$ аппроксимирует распределение интенсивности $J(r)$, соответствующее наблюдаемому изображению. В качестве количественной характеристики этой точности рассмотрим нормированное среднеквадратичное отклонение

$$\Delta = \frac{S}{\bar{n}^2}\overline{\int [J(r) - \hat{J}(r)]^2\,dr}. \tag{2}$$

Введем $J_0(r) = \overline{\hat{J}}(r) = \sum_{k=0}^{N}\overline{\hat{a}}_k\varphi_k(r)$, тогда Δ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых

$$\Delta = \frac{S}{\bar{n}^2}\int [J(r) - J_0(r)]^2\,dr + \frac{S}{\bar{n}^2}\overline{\int [\hat{J}(r) - J_0(r)]^2\,dr} = \Delta_1 + \Delta_2. \tag{3}$$

Учитывая, что

$$\overline{\hat{a}}_k = \frac{1}{S}\overline{\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(r_i)} = \frac{1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\left\{\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(r_i)\right\}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}J(r_l)\,e^{-\int J(r)dr}\,dr_1\ldots dr_n = \frac{1}{S}\int J(r)\,\varphi_k(r)\,dr = a_k, \tag{4}$$

а также ортогональность функций $\varphi_k(r)$, находим

$$\bar{n}^2\Delta_1 = S\int [J(r) - J_0(r)]^2\,dr = S\int\left[J(r) - \sum_{k=0}^{N}a_k\varphi_k(r)\right]^2 dr =$$

$$= S\int J^2(r)\,dr - S^2\sum_{k=0}^{N}a_k^2. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\bar{n}^2\Delta_2 = S\overline{\int [\hat{J}(r) - J_0(r)]^2 dr} = S\overline{\int\left[\sum_{k=0}^{N}\hat{a}_k\varphi_k(r) - \sum_{k=0}^{N}a_k\varphi_k(r)\right]^2 dr} =$$

$$= S^2\sum_{k=0}^{N}[\overline{\hat{a}_k^2} - a_k^2], \tag{6}$$

и так как

$$S^2\overline{\hat{a}_k^2} = \overline{\sum_{l,m=1}^{n}\varphi_k(r_l)\,\varphi_k(r_m)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\left\{\sum_{l,m=1}^{n}\varphi_k(r_l)\,\varphi_k(r_m)\right\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}J(r_i)\,e^{-\int J(r)dr}dr_1\ldots dr_n = \int J(r)\,dr + S^2a_k^2, \tag{7}$$

то окончательно получаем

$$\Delta_2 = \frac{N+1}{\bar{n}^2}\int J(r)\,dr = \frac{N+1}{\bar{n}}. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{S}\int J_{\text{н}}^2(r)\,dr - \sum_{k=0}^{N} a_{k\text{н}}^2 + \frac{N+1}{\bar{n}}, \qquad (9)$$

где $J_{\text{н}} = (S/\bar{n})J(r)$; $a_{k\text{н}} = (S/\bar{n})a_k$.

Из выражения (5) видно, что при выбранной системе функций $\{\varphi_k(r)\}$ значение Δ_1 зависит только от N и не зависит от интенсивности светового излучения, причем с ростом N величина Δ_1 уменьшается. Согласно (8) Δ_2 зависит как от N, так и от суммарной мощности регистрируемого оптического изображения, и с ростом N Δ_2 увеличивается, а с ростом $\bar{n}$ уменьшается. Физический смысл отмеченных зависимостей состоит в том, что величина Δ_1 характеризует ошибку аппроксимации детерминированной функции конечным обобщенным рядом Фурье, а Δ_2 учитывает ошибку, которая возникает из-за того, что реально аппроксимируемое распределение интенсивности, соответствующее зарегистрированному изображению, является случайным.

Из характера зависимостей Δ_1 и Δ_2 от N и $\bar{n}$ следует, что для конкретных условий регистрации оптических изображений существует оптимальное значение $N = N_{\text{опт}}$, при котором величина Δ оказывается минимальной. В соответствии с (9) значение $N_{\text{опт}}$ зависит от вида изображения и для различных изображений оно, в принципе, оказывается разным. Однако, как показали проведенные расчеты, для изображений одинаковой геометрической «сложности» значения $N_{\text{опт}}$ практически не различаются между собой. В общем случае оценку значения $N_{\text{опт}}$ целесообразно проводить по выражению (9) для наиболее типичных представителей из распознаваемых классов.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда для распознавания используются коэффициенты разложения регистрируемой интенсивности в ряд Уолша, так что $\varphi_k(r) = \mathrm{wal}(k, r)$. Для определенности предположим, что на квадратном экране, размер стороны которого принят за единицу, на равномерном фоне наблюдается черно-белое изображение. Тогда выражение (9) принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{q}\right)^2}\left\{\frac{S_\Omega}{S_\omega} + \frac{1}{q^2} + \frac{2}{q} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{N}\left[\int\limits_{\omega}\mathrm{wal}(k, r)\,dr\right]^2}{S_\omega^2} + \frac{\left(1+\frac{1}{q}\right)(N+1)}{\bar{n}_{\text{c}}}\right\}, \qquad (10)$$

где $q = \bar{n}_{\text{c}}/\bar{n}_{\text{ф}}$ ($\bar{n}_{\text{c}}$ и $\bar{n}_{\text{ф}}$ — среднее число актов взаимодействия, обусловленных соответственно информационным сигналом и фоном); ω — об-

Таблица 1

Значения величины Δ для различных значений N и $\bar{n}_{\text{c}}$ при $q=0{,}25$

N	$\bar{n}_{\text{c}}$							
	20	40	60	80	100	120	200	500
0	1,01	1,005	1,004	1,003	1,002	1,001	1	1
1	1,01	1	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992	0,991
2	1,007	0,992	0,987	0,985	0,983	0,982	0,98	0,979
3	1,015	0,995	0,988	0,985	0,983	0,981	0,979	0,977
4	1,022	0,997	0,989	0,985	0,982	0,981	0,977	0,974
5	1,032	1,002	0,992	0,987	0,984	0,982	0,978	0,974
6	1,038	1,004	0,992	0,986	0,983	0,98	0,975	0,972
7	1,048	1,008	0,994	0,988	0,984	0,981	0,976	0,971

Таблица 2

Значения величины Δ для различных значений N и $\bar{n}_c$ при $q=1$

N	$\bar{n}_c$							
	20	40	60	80	100	120	200	500
0	1,025	1,012	1,008	1,006	1,005	1,004	1,002	1
1	0,988	0,962	0,954	0,95	0,947	0,945	0,942	0,94
2	0,934	0,897	0,884	0,878	0,874	0,871	0,867	0,864
3	0,904	0,894	0,877	0,868	0,863	0,86	0,854	0,85
4	0,953	0,891	0,869	0,859	0,833	0,849	0,86	0,863
5	0,978	0,903	0,878	0,865	0,838	0,853	0,863	0,871
6	0,979	0,892	0,863	0,848	0,809	0,833	0,842	0,847
7	1	0,9	0,867	0,85	0,81	0,835	0,837	0,84

ласть, перекрываемая изображением; S_Ω — площадь экрана; S_ω — площадь области ω. В табл. 1 и 2 приводятся результаты расчетов, проведенных по формуле (10) для изображения равнобедренного треугольника, который расположен таким образом, что его ось симметрии параллельна стороне экрана, и для которого $S_\Omega/S_\omega=2$. В табл. 1 даются значения величины Δ для $q=0{,}25$, а в табл. 2 — для $q=1$.

Приведенные результаты наглядно показывают, что зависимость величины Δ от N тем сильнее, чем меньше значения $\bar{n}_c$; кроме того, из сравнения значений Δ в табл. 1 и 2 видно, что изменение Δ более резко проявляется при изменении величины q, чем при изменении $\bar{n}_c$. Нетрудно также заметить, что с ростом N величина Δ не всегда изменяется плавно. Особенно это заметно при приближении N к оптимальному значению, когда начинают проявляться тонкие эффекты. Обусловлено это тем, что коэффициенты ряда Уолша оказываются неодинаково информативны. Поэтому добавление следующего коэффициента может не настолько уменьшить величину Δ_1, насколько увеличивается величина Δ_2. В то же время добавление еще одного коэффициента может резко уменьшить Δ_1, так что в результате величина Δ уменьшается настолько, что становится той, которая имела место до учета двух последних коэффициентов. Наконец, из самого выражения (10) следует, что Δ уменьшается, когда исследуемое изображение полнее перекрывает экран (S_ω/S_Ω).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакут П. А., Свиридов К. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д. Исследование оптимальных условий регистрации голограмм интенсивности и оптических изображений.— «Квантовая электроника», 1975, т. 2, № 8, с. 1688.
2. Троицкий И. Н. Выбор отношения сигнал/шум и размера считывающей апертуры в радиографии.— «Дефектоскопия», 1974, № 2, с. 82.

Поступила в редакцию 18 июня 1976 г.