ных при реализации программы на ЭВМ, будут

$$\alpha_i = \alpha_{iм}^2 0{,}55 \cdot 10^{-7} \left[\frac{1}{n \cdot c}\right].$$

В таблице приведены количества клеток и агрегатов для различных фаз в моменты времени, соответствующие рис. 5. Из таблицы нетрудно видеть, что число одиночных клеток с течением времени уменьшается, а число агрегатов растет. Также следует обратить внимание на то, что нельзя пренебречь агрегатами, состоящими из трех клеток. К концу эксперимента число клеток в агрегатах из трех частиц составляло 9,4% от общего числа клеток.

Обработка данных имеющегося количества экспериментов подтвердила адекватность ММ агрегации суспензии клеток трех фаз, что позволило активно исследовать динамику агрегации клеток. Кроме того, предлагаемая методика с построенной моделью может быть использована для исследования других (не биологических) процессов медленной коагуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов Л. А., Ахмаметьев М. А., Мецгер Б. М., Хижняк Е. В. Штокман М. И. Использование спектров распределения клеток культуры ткани по объемам в изучении механизмов действия биологически активных соединений.— Препринт, № 12. Новосибирск, Изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1973.
2. Иванов В. А., Иванченко Г. А., Кожемякин Г. А. О построении математической модели кинетики агрегации клеток в различных фазах митотического цикла.— «Автометрия», 1976, № 1, с. 103—107.
3. Кройт Г. Р. Наука о коллоидах. Т. 1. Необратимые процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
4. Перетягин Г. И. К проблеме отбраковки аномальных данных.— В кн.: Вопросы построения систем сбора и обработки данных. Новосибирск, изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1973.
5. Гинзбург А. Н., Радионов Ю. И. Автономный диспетчер графического терминала «Дельта».— «Автометрия», 1974, № 4, с. 67—73.

Поступила в редакцию 27 декабря 1976 г.

УДК 681.3.142

В. М. ЕФИМОВ, А. Л. РЕЗНИК

(Новосибирск)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ЩЕЛЕВОГО СКАНИРОВАНИЯ ПОТОКА БЕРНУЛЛИ

В работе [1] описываются алгоритмы аналитического решения с помощью ЭВМ достаточно широкого класса задач, частным случаем которых является следующая:

Имеется выборка объема n из равномерного распределения на отрезке [0,1]. Найти вероятность события, состоящего в том, что внутри отрезка не существует интервала длины $\varepsilon (0<\varepsilon<1)$, содержащего более $k (k \leqslant n)$ элементов выборки.

Эта модель описывает процесс щелевого сканирования изображений дискретной структуры [2]. Кроме того, ее можно интерпретировать как обработку потока заявок Бернулли в многоканальной системе с постоянным временем обслуживания.

При решении этой задачи оказывается возможным применение специальных методов, значительно упрощающих процесс реализации алгоритмов на ЭВМ, а также более наглядных из-за отсутствия процедур, связанных с аналитическим интегрированием полиноминальных выражений и вычислением соответствующих пределов интегрирования.

Искомая вероятность представляется в таком виде (см. [1]):

$$P(\varepsilon) = n! \int_D \dots \int dx_1 \dots dx_n. \qquad (1)$$

Здесь D — область в n-мерном пространстве, задаваемая системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} &0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1; \\ &x_{k+1} - x_1 - \varepsilon > 0; \\ &x_{k+2} - x_2 - \varepsilon > 0; \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &x_n - x_{n-k} - \varepsilon > 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Результаты работы [1] показывают, что выражение (1) в общем случае представляет собой кусочно-полиноминальную функцию от ε с «изломами» в точках $\frac{1}{\left[\frac{n-1}{k}\right] + i}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. Особый интерес представляет поведение этой функции на первом участке — при изменении ε от нуля до $\frac{1}{\left[\frac{n-1}{k}\right] + k - 1}$. Это связано с тем, что знание вида функции на начальном участке дает возможность установить асимптотическое поведение вероятности $P(\varepsilon)$ при $n\varepsilon \ll 1$.

Интеграл (1) можно переписать в таком виде:

$$P(\varepsilon) = n! \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int 1[x_1] \times \dots \times 1[1 - x_n] \times 1[x_{k+1} - x_1 - \varepsilon] \times \dots$$

$$\dots \times 1[x_n - x_{n-k} - \varepsilon]\, dx_1 \dots dx_n, \qquad (2)$$

где

$$1[z] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad z > 0. \end{cases}$$

Алгоритм вычислений основан на тождестве

$$P(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \frac{d^i P}{d\varepsilon^i}(0)\, \varepsilon^i, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\left[\frac{n-1}{k}\right] + k - 1}. \qquad (3)$$

Определим сначала

$$\frac{dP(\varepsilon)}{d\varepsilon} = n! \int \dots \int \frac{d}{d\varepsilon} \{1[\dots] \times \dots \times 1[\dots]\}\, dx_1 \dots dx_n. \qquad (4)$$

В дальнейшем потребуются следующие простые соотношения:

$$\frac{d}{dz} 1[z] = \delta(z); \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)\, f(z)\, dz = f(0). \qquad (6)$$

Производная произведения единичных функций, стоящих в фигурных скобках выражения (4), находится по обычным правилам дифференцирования суперпозиции и произведения функций с учетом соотношения (5), так что подынтегральное выражение распадается на сумму произведений, в каждое из которых в качестве сомножителей входят набор единичных и одна дельта-функция. Интеграл, получающийся в результате дифференцирования, разобьем на сумму интегралов в соответствии с количеством слагаемых в подынтегральном выражении. Каждый из них можно упростить, проведя интегрирование по одной из переменных, входящих в аргумент соответствующей дельта-функции. Фактически для этого нужно лишь, используя соотношение (6), произвести необходимую подстановку в аргументы всех единичных функций. В результате последовательного выполнения таких преобразований выражение для $\frac{dP(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ примет вид суммы интегралов, кратность которых на единицу меньше по сравнению с первоначальным интегралом (2). Общий же вид подынтегральных выражений — произведение некоторых единичных функций — остается неизменным. Поэтому сохраняется возможность повторного использования описанной процедуры для вычисления старших производных без какого-либо изменения структурной схемы.

Итак, любая производная $\frac{d^jP(\varepsilon)}{d\varepsilon^j}$ $(j=0, 1, \ldots, n)$ представляется как сумма интегралов кратности $n-j$. Ее значение в нуле будем вычислять следующим образом. При подстановке в каждый из интегралов $\varepsilon=0$ набор единичных функций, входящих в подынтегральное выражение, содержит в себе тривиальную информацию: либо система их противоречива (следовательно, интеграл равен нулю), либо эта система накладывает ограничения лишь на порядок следования переменных внутри интервала (0,1). В последнем случае интеграл равен $1/(n-j)!$, где j — порядок производной, числовое значение которой определяется в точке $\varepsilon=0$. Суммируя значения всех интегралов, на которые распадается исходный интеграл (2), получаем конкретное значение первой производной $\left.\frac{dP(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$, затем $\left.\frac{d^2P(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$ и т. д.

После того как по описанной схеме определены значения всех производных в нуле, коэффициенты искомого полинома $P(\varepsilon)$ находятся из соотношения (3).

На ЭВМ процесс решения сформулированной в начале статьи задачи представляет собой последовательную реализацию изложенного выше алгоритма. Существенное отличие его от алгоритмов, приводимых в работе [1], заключается также в том, что ему не требуется большого объема оперативной памяти. Это позволяет проводить все вычисления в мультипрограммном режиме. Исходными данными, вводимыми в машину, являются два параметра, характеризующих входной поток заявок и обслуживающую их систему: n — количество заявок, подлежащих обслуживанию; k — число каналов системы.

Программные модули, необходимые для аналитического вычисления статистических характеристик процесса щелевого сканирования, выполнены на языке ФОРТРАН. Контрольные расчеты проведены на ЭВМ АСВТ М-4030.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов В. М., Резник А. Л. Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n-мерном пространстве.— «Автометрия», 1976, № 1, с. 116—119.
2. Ефимов В. М., Искольдский А. М., Крендель Ю. М., Лившиц З. А. О характеристиках различных методов считывания изображений дискретной структуры.— «Автометрия», 1973, № 1, с. 3—7.

Поступила в редакцию 18 марта 1977 г.