3. Красников В. И., Сычугов С. В., Суматохин В. А., Фаворов В. А. Некоторые результаты исследования зон роста и анизотропии физических свойств монокристаллов пирита.— В кн.: Геология, геохимия и прогнозная оценка рудных районов и месторождений Забайкалья. Иркутск, изд. Иркутского гос. ун-та, 1973, с. 181.
4. Колпаков И. Ф. Электронная аппаратура на линии с ЭВМ в физическом эксперименте. М., Атомиздат, 1973. 232 с.
5. Борде Б. И., Вейсов Е. А., Сысоев А. В., Кривошеев В. А. Устройство регистрации данных эксперимента на перфоленте в коде М2.— В кн.: Тонкие магнитные пленки, вычислительная техника и ...

окончательный вариант — 21 июля 1976 г.

УДК 519.24

**Г. И. БЕЛЯЕВ, О. К. РУЖИН, Г. П. СЕМЕНОВ,**
**В. Н. ХАРИСОВ**

*(Джезказган)*

# ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАТУРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим возможность разработки общего подхода к задаче использования имеющейся априорной информации о реальном объекте, результатов текущих экспериментов и моделирования.

Пусть исследуемая сложная система (реальный объект) описывается оператором $y=\varphi(x)$, отображающим вектор входных воздействий $x$ в исследуемую характеристику $y$. Ставится задача оценки математического ожидания характеристики

$$\Theta = E_p\{\varphi(x)\} = \int\limits_X \varphi(x)\, p(x)\, dx, \qquad (1)$$

где $p(x)$ — плотность вероятности вектора $x$, заданная на пространстве входных воздействий $X$.

Распространенным методом вычисления многомерных интегралов типа (1) является метод статистических испытаний. При этом вычисление интеграла (1) осуществляется по квадратурной формуле

$$\widehat{\Theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i) \qquad (2)$$

($x_i$ — узлы квадратурной формулы; $N$ — количество узлов). Назначение $x_i$ производится в соответствии с заданной плотностью вероятности $p(x)$.

Такой подход вполне оправдан, если отсутствуют априорные сведения о функциональном представлении $\varphi(x)$. Однако на практике всегда имеется, и довольно значительная, информация о $\varphi(x)$, полученная в результате анализа системы в процессе предшествующих натурных экспериментов. С учетом этого использование формулы (2) для расчета оценок экономически не всегда целесообразно.

Так как информация о $\varphi(x)$ носит вероятностный характер, представим ее в терминах распределения случайной функции отклика $y(x)$, заданной на некотором пространстве $\Phi$ с мерой $\mu(dy)$. При этом функция отклика исследуемого объекта $\varphi(x)$ представляет собой конкретную реализацию случайной функции $y(x)$, а $y(x_i)$ — значение функции отклика, реализованное в точке $x_i$. Для дальнейшего рассмотрения потребуется математическое ожидание

$$\varphi_0(x) = E_\mu\{y(x)\} = \int\limits_\Phi y(x)\,\mu(dy) \tag{3}$$

и дисперсия функции отклика

$$\sigma^2(x) = \int\limits_\Phi [y(x) - \varphi_0(x)]^2\,\mu(dy). \tag{4}$$

Оптимальную оценку будем искать в классе несмещенных оценок. Представим выражение (1) в следующем виде:

$$\int\limits_X \varphi(x)\,p(x)\,dx = \int\limits_X \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{f(x)}\,p(x)\,f(x)\,dx + \int\limits_X \psi(s)\,p(s)\,ds, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — некоторая известная функция (модель объекта); $f(x)$ — плотность вероятности вектора входных воздействий при эксперименте.

Второе слагаемое (5) представляет собой главную часть искомого интеграла и может быть определено с любой требуемой степенью точности. Тогда оценка интеграла (5) определится по формуле

$$\widehat{\Theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi(x) - \psi(x_i)}{f(x_i)}\,p(x_i) + \int\limits_X \psi(s)\,p(s)\,ds, \tag{6}$$

где значения $x_i$ выбираются независимо в соответствии с плотностью $f(x)$. Такая специальная структура оценки обеспечивает несмещенность оценки $\widehat{\Theta}$ при любых $\psi(x)$ и $f(x)$. Из результатов [1] следует также, что эта структура является единственной в классе линейных функций от выходов объекта и модели, обеспечивающей несмещенность при всех $\varphi(x)$ и $p(x)$. Будем искать оптимальные функции $\psi(x)$ и $f(x)$.

Поскольку в выражение для дисперсии оценки входит неизвестная функция отклика объекта, в качестве критерия оптимальности примем дисперсию оценки, усредненную по пространству функций отклика.

Эта «средняя» дисперсия $\widehat{\Theta}$ имеет вид

$$D_{\widehat{\Theta}} = \frac{1}{N}\,E_\mu\left\{E_f\left\{\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{f(x)}\,p(x) - \left[E_f\left\{\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{f(x)}\,p(x)\right\}\right]^2\right\}\right\}, \tag{7}$$

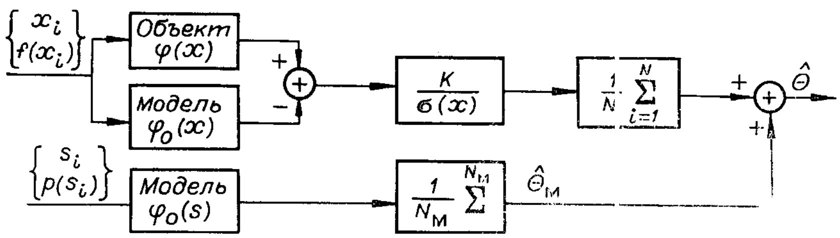
где $E_f$ — символ усреднения по $x$ с плотностью $f(x)$; $E_\mu$ — символ усреднения по $y$ с вероятностной мерой $\mu(dy)$. После простых преобразований получим

$$D_{\widehat{\Theta}} = \frac{1}{N}\int\limits_X \frac{\sigma^2(x)\,p^2(x)}{f^2(x)}\,dx + \frac{1}{N}E_f\left\{\frac{(\varphi_0(x) - \psi(x))^2}{f^2(x)}\,p^2(x)\right\} - $$
$$- \frac{1}{N}\left[E_f\left\{\frac{\varphi(x) - \psi(x)}{f(x)}\,p(x)\right\}\right]^2. \tag{8}$$

Минимум дисперсии (8) достигается при

$$[\varphi_0(x) - \psi(x)]\,p(x)/f(x) = \text{const}. \tag{9}$$

При условии $\psi(x) = \varphi_0(x)$ соотношение (9) выполняется для всех $f(x)$, обеспечивая возможность минимизации первого слагаемого в соотношении (8) без ограничений на $f(x)$. Это означает, что $\psi(x)$, рассматрива-




емая как функция отклика модели, должна совпадать с математическим ожиданием функции отклика объекта.

Дисперсия $\sigma^2(x)$ при этом характеризует предполагаемое отклонение модели от объекта в зависимости от входных воздействий. Выбор $f(x)$ сводится в этом случае к минимизации

$$D_{\hat{\Theta}} = \frac{1}{N}\left[\int_X \sigma^2(x)\frac{p^2(x)}{f(x)}\,dx\right]. \tag{10}$$

Выражение для плотности вероятности $f(x)$, минимизирующей дисперсию оценки, запишется в виде

$$f(x) = 1/K[\sigma(x)p(x)], \tag{11}$$

где $K = \int_X \sigma(x)\,p(x)\,dx \quad (\sigma(x) = |(\sigma^2(x))^{1/2}| > 0)$.

В итоге выражение (6) для оценки $\hat{\Theta}$ примет вид

$$\hat{\Theta} = \frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)}{\sigma(x_i)} + \int_X \varphi_0(s)\,p(s)\,ds. \tag{12}$$

Заметим, что при практическом построении моделей сложных систем удовлетворить точно условию $\psi(x) = \varphi_0(x)$ невозможно. Однако, несмотря на это, условие несмещенности оценки (12) не нарушается, а происходит лишь увеличение ее дисперсии на величину

$$\Delta = \frac{1}{N}\left\{E_f\left\{\frac{(\psi(x) - \varphi_0(x))^2\,p^2(x)}{f^2(x)}\right\} - \left[E_f\left\{\frac{(\psi(x) - \varphi_0(x))\,p(x)}{f(x)}\right\}\right]^2\right\}. \tag{13}$$

Вычисление интегрального слагаемого в (12) наиболее удобно производить методом статистических испытаний на модели. Предполагая стоимость одного расчета на модели намного ниже стоимости одного натурного эксперимента, можно считать, что интегральное слагаемое определяется достаточно точно, и не учитывать дисперсию его оценки ввиду ее малости относительно дисперсии первого слагаемого в (12).

Таким образом, структурная схема получения комбинированной оценки $\hat{\Theta}$ имеет вид, изображенный на рисунке.

Обсудим физический смысл полученных результатов. Искомая комбинированная оценка представляет сумму модельной оценки $\hat{\Theta}_м$ и оценки смещения результатов моделирования относительно реального значения. Последняя получается при сравнении результатов натурного эксперимента и моделирования при одинаковых входных воздействиях. Таким образом, роль натурных экспериментов сводится к коррекции результатов моделирования.

Заметим, что предлагаемая структура комбинированной оценки объединяет в себе два известных способа повышения точности оценки в методе статистического моделирования. Действительно, использование натурных экспериментов для оценки отклонения $\varphi(x)$ от $\varphi_0(x)$ полностью соответствует методу «выделения главной части», а выбор плотности $f(x)$ с учетом априорных сведений об отклонении соответствует методу «выборки по возможности» [2].

В рассматриваемом методе предполагается задание на модели входных воздействий, идентичных входным воздействиям $x$ на объект. Точная реализация таких воздействий, например, на физическую модель затруднительна. Покажем, что отклонения входных воздействий оставляют оценку несмещенной. Пусть в натурном эксперименте на входе объекта имело место воздействие $x$. При организации этого же воздействия на входе модели появилась ошибка $\delta$. Эта ошибка носит случайный характер и описывается плотностью распределения $q(\delta)$.

Считаем, что при получении на модели оценки $\widehat{\Theta}_{м}$ условия не изменяются, так что вместо входных воздействий, распределенных с плотностью $p(s)$, на входе модели реализуются $s+\delta$, где $\delta$ по-прежнему распределено с плотностью $q(\delta)$. Тогда математическое ожидание оценки равно

$$E_p E_f E_q\{\widehat{\Theta}\} = E_f = E_q\left\{\frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i+\delta)}{\sigma(x_i)}\right\} +$$
$$+ E_p E_q\left\{\frac{1}{N_{м}}\sum_{i=1}^{N_{м}}\varphi_0(x_i+\delta_i)\right\} = E_f\left\{\frac{K\varphi(x)}{\sigma(x)}\right\} - E_f E_q\left\{\frac{K\varphi_0(x+\delta)}{\sigma(x)}\right\} +$$
$$+ E_p E_q\{\varphi_0(x+\delta)\}.$$

Так как $E_f\{K\varphi_0(x_0+\delta)/\sigma(x)\} = E_p\{\varphi_0(x_0+\delta)\}$, то

$$E_p E_f E_q\{\widehat{\Theta}\} = E_p\{\varphi(x)\}\widehat{\Theta}. \tag{14}$$

Рассмотрим дисперсию комбинированной оценки. Если воздействие на модель воспроизводится безошибочно, т. е. $\delta=0$, то ожидаемая дисперсия оценки определяется из соотношений (10) и (11) и равна

$$D^0_{\widehat{\Theta}} = \frac{1}{N}\left(\int_X \sigma(x)\,p(x)\,dx\right)^2. \tag{15}$$

При искажении входных воздействий на входе модели средняя по пространству функций отклика дисперсия оценки, в предположении достаточно большого числа реализаций на модели, выражается формулой

$$D_{\widehat{\Theta}} = E_{\mu}\left\{E_f E_q\left\{\left[\frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi(x)-\varphi_0(x_i+\delta_i)}{\sigma(x_i)} - \frac{K}{N}E_f E_q \times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i+\delta_i)}{\sigma(x_i)}\right\}\right]^2\right\}\right\} = \frac{K^2}{N}E_{\mu}E_f\left\{\left[\frac{\varphi(x)-\varphi_0(x)}{\sigma(x)} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - E_f\left\{\frac{\varphi(x)-\varphi_0(x)}{\sigma(x)}\right\}\right]^2\right\} + \frac{K^2}{N}E_f E_q\left\{\left[\frac{\varphi_0(x)-\varphi_0(x+\delta)}{\sigma(x)} -\right.\right. \tag{16}$$
$$\left.\left. - E_f E_q\left\{\frac{\varphi_0(x)-\varphi_0(x+\delta)}{\sigma(x)}\right\}\right]^2\right\} = D^0_{\Theta} + \frac{K^2}{N}D\delta.$$

Таким образом, при искажении входных воздействий дисперсия оценки увеличивается на слагаемое, характеризующее дисперсию отклонения выхода модели за счет искажения входных воздействий. Выражения (14), (16) свидетельствуют о возможности существенного уменьшения дисперсии оценки некоторой характеристики объекта при совместном использовании результатов натурного эксперимента и моделирования. Дисперсия комбинированной оценки определяется теперь несовпадением модели и объекта; при «хороших» моделях она значительно меньше дисперсии оценки только по данным натурного эксперимента. Кроме того, уменьшение дисперсии оценки достигается за счет специального выбора распределения входных воздействий в соответствии с формулой (11). Из формулы видно, что входные воздействия должны формироваться не только на основе условий функционирования объекта, которые задаются плотностью вероятности $p(x)$, но также с учетом априорной информации о возможных рассогласованиях модели относительно реального объекта, задаваемых дисперсией $\sigma^2(x)$. Искажения входных воздействий при моделировании относительно входных воздействий при натурном эксперименте сохраняют несмещенность и состоятельность оценки, но приводят к некоторому увеличению ее дисперсии (16). Эти результаты доказывают устойчивость предлагаемого метода комбинированной [illegible] меняют существа рассмотренного метода комбинированной оценки. Он легко распространяется на случай оценки вектора выходных характеристик объекта. При этом определение наиболее благоприятного распределения $f(x)$ осуществляется из условия минимизации некоторой нормы корреляционной матрицы выходных координат объекта.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пугачев В. Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М., «Сов. радио», 1973.
2. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., «Наука», 1971.


*Поступила в редакцию 16 декабря 1974 г.*

---

УДК 519.1 : 519.2 : 62-529

**В. И. ЗНАК**

(*Новосибирск*)

# К АЛГОРИТМУ ОЦЕНКИ ТРУДОЕМКОСТИ ПРОГРАММ

I. Задача выявления характеристик алгоритмов, в частности оценки времени их реализации, возникает во многих практически важных случаях. В первых работах [1, 2], посвященных этому вопросу, необходимые оценки получены с помощью матрицы переходов. Однако при этом теряется информация об отдельных ветвях или вариантах реализации алгоритма, что может представлять самостоятельный интерес. Попытки учесть структурные особенности алгоритмов и их схем предприняты в работах [3, 4], где на исследуемые схемы, однако, наложены те или иные структурные ограничения. Кроме того, использование результатов [4] приводит в определенных случаях к избыточным в вычислительном плане процедурам оценок. В данной работе (см. п. II) рассмотрен лишенный отмеченных недостатков алгоритм исследования структурных особенностей схем программ и оценки их трудоемкости; получены граничные оценки трудоемкости и оценка частоты реализации