ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Введение. В настоящее время существует множество сложных информационно-измерительных систем (ИИС), в ходе проектирования которых нельзя воспользоваться методами, приемлемыми при проектировании несложных систем, например методом перебора возможных вариантов. До сих пор в инженерной практике при проектировании достаточно сложных систем пользуются интуитивно-эвристическими соображениями. При этом трудно сказать, насколько получившаяся система близка к оптимальной и можно ли спроектировать систему, которая лучше (в смысле некоторого критерия качества). Поэтому в наши дни, когда сложность систем непрерывно растет, весьма актуальным становится вопрос об автоматизации проектирования оптимальных ИИС (см., например, [1]).

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий получить формализованную математическую постановку задачи проектирования оптимальной ИИС, предназначенной для определения параметров состояния линейного динамического объекта. Получающаяся математическая задача может быть решена известными методами с использованием ЭВМ.

Постановка задачи. Будем рассматривать линейную динамическую систему, описываемую уравнением

$$\dot{x}(t)=\mathcal{F}(t)x(t)+u(t), \quad x(0)=x_0, \quad M\{x_0\}=0,$$
$$M\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\}=P_0, \quad M\{u(t)u^{\mathrm{T}}(t')\}=Q(t)\,\delta(t-t'), \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ — вектор-столбцы состояния и возмущений; $\mathcal{F}$, P_0, Q — матрицы $n\times n$, причем последние две неотрицательно определены; $\delta(\cdot)$—дельта-функция Дирака; $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания; т — знак транспонирования. (Здесь и впредь средние значения возмущений и шумов измерения предполагаются равными нулю.)

Имеется два вида наборов измерительных элементов: непрерывного действия и эпизодического действия — корректирующие. Математически эти измерения записываются следующим образом:

1) Элементы непрерывного действия —

$$z_i=H_ix+v_i;$$
$$M\{v_i(t)v_i^{\mathrm{T}}(t')\}=R_i(t)\,\delta(t-t'), \quad i=1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

2) Корректирующие элементы —

$$z_i^{\mathrm{к}}=H_i^{\mathrm{к}}x+v_i^{\mathrm{к}};$$
$$M\{v_i^{\mathrm{к}}(t_l)\left(v_i^{\mathrm{к}}(t_j)\right)^{\mathrm{T}}\}=R_i^{\mathrm{к}}(t_l)\,\delta_{lj}, \quad i=1,2,\ldots,m_{\mathrm{к}}, \tag{3}$$

где t_l, t_j — моменты коррекции; δ_{lj} — символ Кронекера.

Предполагаем, что шумы измерений разных элементов не коррелированы. Каждый i-й элемент характеризуется вектором стоимости s_i размерности q (если он непрерывного действия) или $s_i^{\mathrm{к}}$ размерности $q_{\mathrm{к}}$ (если он корректирующий). Элементы векторов s_i и $s_i^{\mathrm{к}}$ могут иметь не только стоимостную интерпретацию. Предполагается, что стоимость совокупности элементов ИИС аддитивна, т. е. равна сумме стоимостей отдельных элементов. Суммарные стоимости элементов непрерывного действия и корректирующих элементов ИИС ограничены сверху векторами s_0 и $s_0^{к}$ соответственно. Кроме того, предполагаем, что каждое использование j-го корректирующего элемента сопряжено с определенными скалярными потерями, которые будем называть стоимостью коррекции и обозначать через c_j.

Пусть от ИИС требуется, чтобы она обеспечивала наилучшую (в некотором смысле) точность определения интересующих нас параметров динамической системы и наименьшую суммарную стоимость коррекций при ограничениях на стоимость совокупности элементов ИИС. Эти два требования, очевидно, являются противоречивыми. Решение таких задач (задач с векторной целевой функцией [2]) сопряжено с определенными трудностями. В настоящей работе для решения задачи проектирования оптимальной ИИС предлагается упрощенный двухэтапный подход.

На первом этапе решается задача выбора непрерывно действующих элементов ИИС на основе критерия максимальной точности. На втором этапе при фиксированном (получившемся на первом этапе) наборе элементов непрерывного действия определяется оптимальный состав корректирующих элементов ИИС на основе критерия минимума стоимости коррекций (критерии будут сформулированы в соответствующих разделах).

Характеристика точности ИИС. Предполагаем, что для получения оценок параметров состояния динамической системы применяется оптимальный в среднеквадратическом смысле метод фильтрации Калмана — Бьюси [3, 4]. Точность оценок характеризуется ковариационной матрицей ошибок P, которая, как известно, для системы (1) и измерений вида

$$z = Hx + v,\quad M\{v(t)\,v^{т}(t')\} = R(t)\,\delta(t-t') \qquad (4)$$

удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot{P} = \mathcal{F}P + P\mathcal{F}^{т} + Q - PH^{т}R^{-1}HP,\quad P(0) = P_0. \qquad (5)$$

Если в момент времени t_i производится коррекция по измерению

$$z^{к}(t_i) = H^{к}(t_i)\,x(t_i) + v^{к}(t_i);$$
$$M\{v^{к}(t_i)\,(v^{к}(t_i))^{т}\} = R^{к}(t_i), \qquad (6)$$

то [5]

$$P(t_i) = P(t_i-0) - P(t_i-0)\,(H^{к}(t_i))^{т}[R^{к}(t_i) + H^{к}(t_i)\,P(t_i-0)\,(H^{к}(t_i))^{т}]^{-1}\times$$
$$\times H^{к}(t_i)\,P(t_i-0), \qquad (7)$$

где $P(t_i-0)$ — ковариационная матрица ошибок непосредственно перед корректирующим измерением (6).

Под текущей характеристикой точности ИИС будем понимать некоторую линейную комбинацию диагональных элементов ковариационной матрицы ошибок

$$L(P(t)) = \sum_{i=1}^{n} k_i P_{ii}(t),\quad k_i \geqslant 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

I этап. Определение состава элементов ИИС непрерывного действия. Рассматриваемая в этом пункте задача похожа на задачу, сформулированную в работе [6]. В дискретном варианте аналогичная задача ставилась в [7].

Введем вектор булевских переменных b размерности m с элементами, равными либо нулю, либо единице. Сформируем следующие матрицы:

$$R_b = \begin{pmatrix} b_1^{-1}(R_1) & & & 0 \\ & b_2^{-1}(R_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_m^{-1}(R_m) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_m \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Теперь, если записать

$$z = Hx + v_b, \quad M\{v_b(t)\, v_b^{\mathrm{T}}(t')\} = R_b(t)\, \delta(t - t'), \tag{10}$$

то легко заметить, что $b_i = 1$ соответствует наличию, а $b_i = 0$ — отсутствию в ИИС i-го элемента.

Ковариационная матрица ошибок оценки состояний системы (1) по измерениям (10) определяется уравнением

$$\dot{P} = \mathcal{F}P + P\mathcal{F}^{\mathrm{T}} + Q - PH^{\mathrm{T}}R_b^{-1}HP, \quad P(0) = P_0. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение матрицу $J = P^{-1}$. Умножая обе части (11) на J справа и слева, с учетом известного соотношения $\frac{dP^{-1}}{dt} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$ получаем для J следующее уравнение:

$$\dot{J} = -\mathcal{F}^{\mathrm{T}}J - J\mathcal{F} - JQJ + H^{\mathrm{T}}R_b^{-1}H, \; J(0) = J_0 = P_0^{-1}. \tag{12}$$

Покажем выпуклость характеристики точности $L(P)$ по $b \in [0, \infty)^m$. Для этого рассмотрим вторую вариацию $J(t)$ по b. Из (12) легко получается уравнение

$$\delta^2\dot{J} = -(\mathcal{F}^{\mathrm{T}} + JQ)\,\delta^2 J - \delta^2 J(\mathcal{F} + QJ) - 2\delta JQ\delta J + {} \\ + H^{\mathrm{T}}\delta^2 R_b^{-1}H, \quad \delta^2 J(0) = 0. \tag{13}$$

Вводя фундаментальную матрицу $\Phi(.,.)$ для $-(\mathcal{F}^{\mathrm{T}} + JQ)$, можно записать

$$\delta^2 J(t) = \int_0^t \Phi(t, s)\left[H^{\mathrm{T}}(s)\,\delta^2 R_b^{-1}(s)\,H(s) - 2\delta J(s)\,Q(s)\,\delta J(s)\right]\Phi^{\mathrm{T}}(t, s)\,ds, \tag{14}$$

где

$$\delta^2 R_b^{-1} = R_b^{-1}\left(2\delta R_b R_b^{-1}\delta R_b - \delta^2 R_b\right)R_b^{-1}, \tag{15}$$

$$\delta R_b = -\begin{pmatrix} \delta b_1 b_1^{-2}(R_1) & & & 0 \\ & \delta b_2 b_2^{-2}(R_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta b_m b_m^{-2}(R_m) \end{pmatrix}; \tag{16}$$

$$\delta^2 R_b = 2\begin{pmatrix} (\delta b_1)^2 b_1^{-3}(R_1) & & & 0 \\ & (\delta b_2)^2 b_2^{-3}(R_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (\delta b_m)^2 b_m^{-3}R(_m) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Подставляя матрицы (16) и (17) в (15), получаем $\delta^2 R_b^{-1} = 0$. Поэтому из (14) следует отрицательная определенность $\delta^2 J(t)$. Поскольку

$\delta^2 P(t) = P(2\delta JP\delta J - \delta^2 J)P$, можно говорить о положительной определенности $\delta^2 P(t)$.

Теперь, рассматривая (8), убеждаемся в выпуклости характеристики точности $L(P)$, которая следует из условия

$$\delta^2 L(P) = \sum_{i=1}^{n} k_i \delta^2 P_{ii} \geqslant 0.$$

Сформулируем задачу оптимизации. Пусть T — некоторое характерное для ИИС время, например среднее время между коррекциями для известного прототипа проектируемой ИИС. Тогда разумно выбрать в качестве целевой, например, следующие функции:

$$f(b) = L(P(T)), \quad f(b) = \int_0^T L(P(s))\,ds. \qquad (18)$$

Особенностью этих функций является то, что они выпуклы по $b \in [0, \infty)^m$.

Пусть выбрана целевая функция f, выпуклая по b. Тогда математически задачу определения состава непрерывно работающих элементов ИИС можно сформулировать следующим образом:

$$\min_b f(b), \quad \sum_{i=1}^{m} b_i s_{il} \leqslant s_{0l}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \ l = 1, 2, \ldots, q. \qquad (19)$$

Получили задачу выпуклого целочисленного программирования. Эта задача может быть решена с использованием известных методов [8—10] на быстродействующих вычислительных машинах (при этом существенно полезным оказывается свойство выпуклости целевой функции).

II этап. Определение состава корректирующих элементов ИИС. В ходе эксплуатации ИИС обычно желательно, чтобы характеристика точности L в промежутках между интервалами коррекции не превышала определенного уровня L_0.

Будем считать поток коррекций стационарным. Предположим, что можно задать некоторое характерное значение ковариационной матрицы P_0 такое, что $L(P_0) = L_0$. Если теперь произвести коррекцию по данным j-го элемента в момент времени $t=0$, то $L(P(t=+0)) < L_0$ (см. (7)). Пусть после коррекции остается работать только состав непрерывно действующих элементов ИИС. Тогда пройдет некоторое время τ_j, пока L станет снова равным L_0.

Определим для каждого корректирующего элемента τ_j, $j = 1, 2, \ldots, m_к$. Теперь приближенно можно считать, что в реальных ситуациях интервал времени от момента коррекции j-м элементом до момента следующей коррекции будет равен τ_j.

Пусть на некотором достаточно большом интервале работы ИИС $[0, T]$ $(T \longrightarrow \infty)$ было n_j коррекций j-м элементом, $j = 1, 2, \ldots, m_к$. Тогда стоимость коррекций на всем интервале работы ИИС

$$c = \sum_{j=1}^{m_к} c_j n_j.$$

Определим стоимость коррекций на единицу интервала времени работы ИИС:

$$c_0 = \frac{c}{T} = \sum_{j=1}^{m_к} c_j \frac{n_j}{T}. \qquad (20)$$

Введем обозначение $\nu_j = n_j/T$. При $T \longrightarrow \infty$ ν_j может изменяться непрерывно в $[0, \infty)$.

Рассмотрим вектор булевских переменных a такой, что $a_j=1$ соответствует присутствию, $a_j=0$ — отсутствию в ИИС j-го корректирующего элемента. Тогда задачу определения оптимального состава корректирующих элементов ИИС можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
\min_{a,\nu} c_0, \quad c_0=\sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} c_j \nu_j; \\
\sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} a_j s_{jl}^{\text{к}} \leqslant s_{0l}^{\text{к}}, \quad l=1,2,\ldots,q_{\text{к}} \\
\sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} \tau_j n_j = T \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} \tau_j \nu_j = 1 \\
\nu_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\ldots,m_{\text{к}}.
\end{gathered} \tag{21}
$$

В реальных задачах проектирования в (21) могут появляться и другие дополнительные ограничения, обусловленные спецификой работы ИИС и корректирующих элементов.

Нетрудно установить связь между a_j и ν_j:

$$
a_j=\begin{cases} 0, & \nu_j=0; \\ 1, & \nu_j>0. \end{cases} \tag{22}
$$

Очевидно, задачу (21), (22) можно представить в другом эквивалентном виде:

$$
\begin{gathered}
\min_{a,\nu} \sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} c_j \nu_j a_j; \\
\sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} a_j s_{jl}^{\text{к}} \leqslant s_{0l}^{\text{к}}, \quad l=1,2,\ldots,q_{\text{к}}; \\
\sum_{j=1}^{m_{\text{к}}} a_j \tau_j \nu_j = 1; \\
\nu_j \geqslant 0, \quad a_j \in \{0,1\}, \; j=1,2,\ldots,m_{\text{к}}.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Получилась задача смешанного нелинейного программирования, которая может быть решена приближенно итеративными методами.

Описанная выше методика была использована при решении с применением ЭВМ БЭСМ-6 одной прикладной задачи выбора оптимального состава измерительных средств для динамической системы размерности 20.

При решении задачи I этапа (19) (задача выпуклого булевского программирования) применялся алгоритм, в котором существенно использовалось свойство выпуклости целевой функции и который близок к алгоритму, предложенному в [10]. При решении задачи II этапа (23) (задача смешанного нелинейного программирования) применялся приближенный релаксационный метод, основанный на последовательном решении задачи целочисленного линейного программирования (программа из [11]) и задачи линейного программирования (первая процедура из [12]). При вычислении характеристики точности L использовался приближенный метод, основанный на сведении непрерывного матричного уравнения Риккати к дискретному.

Как показывают расчеты и опыт работы с ЭВМ, задачи размерности до 15 могут решаться на ЭВМ типа М-20, для решения задач более высокой размерности требуются ЭВМ с большей памятью (и желательно с большим быстродействием), например, БЭСМ-6

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулаев Ш.-С. О., Беседин Б. А. О синтезе оптимальных фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем.— «Автометрия», 1974, № 2, с. 10—18.
2. Борисов В. И. Проблемы векторной оптимизации.— В кн.: Исследование операций. Методологические аспекты. М., «Наука», 1972, с. 72—91.
3. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory.— "Trans. ASME, J. Basic Engrg.", 1961, vol. D83, N 1, p. 95—107.
4. Kailath T. An innovation approach to least — squares estimations. Part I: Linear-filtering in additive white noise.— "Trans. IEEE", vol. AC-13, N 6, p. 646—655.
5. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971.
6. Поддубный В. В., Якупов Р. Т. Об оптимизации измерительного комплекса для динамических систем.— «Труды СФТИ», 1974, вып. 60, ч. 2, с. 180—185.
7. Беседин Б. А. Об оптимальных структурах информационно-измерительных систем.— Тезисы докладов III Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, Изд. ИМ СО АН СССР, 1974, с. 55—56.
8. Демьянов В. Ф. К решению целочисленных задач выпуклого программирования.— В кн.: Оптимальные системы автоматического управления. М., «Наука», 1967, с. 14—26.
9. Червак Ю. Ю. Метод лексикографического поиска решения для дискретных задач выпуклого программирования.— «Укр. матем. журн.», 1974, т. 26, № 2, с. 269—272.
10. Bank B., Kleinmann P. Note on the reduction of nonlinear integer programming to a sequence of linear integer optimization problems.— "Ekonomicko-matematcky Obzor", 1975, vol. 11, N 2, p. 162—164.
11. Коробкова З. В. Программа для решения целочисленной задачи выбора вариантов.— В кн.: Вопросы численного решения оптимизационных экономико-математических задач. Новосибирск, Изд. ИЭ и ОПП СО АН СССР, 1973, с. 17—40.
12. Болдырев В. И., Хохлюк В. И. Три процедуры симплекс-метода.— В кн.: Вычислительные системы. Вып. 59. Новосибирск, «Наука», 1974, с. 119—138.

Поступила в редакцию 27 апреля 1976 г.;
окончательный вариант — 10 сентября 1976 г.

УДК 62-506 : 519.8

Н. Д. ВАСИЛЬЕВ, В. Г. ИВКИН, И. В. МОЗИН, В. А. ШЕЛЕХОВ

(Ленинград)

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача сравнения методов поиска экстремума возникла в связи с построением системы автоматической оптимизации режима работы циклического ускорителя заряженных частиц — протонного синхротрона ИТЭФ. Методы поиска, сравнительная оценка которых дается в настоящей работе, — последовательное симплексное планирование (ПСП) [1] и случайный поиск [2] в модификациях с наказанием случайностью (СПНС), с оценкой градиента (СПОГ) и с самообучением (СПС) — были признаны ранее [3] наиболее пригодными для автоматической оптимизации ускорителя.

С точки зрения теории управления поиск максимальной интенсивности пучка ускоренных протонов классифицируется как многопараметрическая оптимизация в условиях высокого уровня шумов и неизвестного вида поверхности критерия оптимальности. Поэтому важно знать характеристики эффективности априорно выбранных методов оптимизации, полученные в условиях, близких к существующим на объекте.