А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1977

СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 621.317.080

Ш.-С. О. АБДУЛАЕВ, В. А. ВОЛКОВ, В. В. ПИЦЫК

(Новосибирск)

ОБОСНОВАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К ТОЧНОСТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В работе [1] рассмотрена задача оценивания требований к диагональным элементам корреляционной матрицы погрешностей измерений по заданным требованиям к точности определения координат подвижного объекта, характеризуемых вектором $Q=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$. При этом для выбранного состава измеряемых величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ в зависимости от положения объекта в пространстве определяется вектор $\widehat{X}=(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_r)$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(\widehat{X})=\min_{X\in R}\Phi(X), \tag{1}$$

здесь компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_r$ вектора X являются веса, обусловленные методом статистической обработки величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; Φ — нелинейная функция, определенная как разность корреляционных матриц (2) в [1]; R — некоторое множество векторов X, для которых выполняется соотношение

$$\widehat{F}\subseteq\overset{\circ}{F}, \tag{2}$$

где $\widehat{F}$ и $\overset{\circ}{F}$ — множество точек, принадлежащих соответствующим эллипсоидам ($\widehat{\mathscr{F}}$ и $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$) рассеяния погрешностей определения вектора Q с уравнениями поверхности $\widehat{\mathscr{F}}=\{g:g^{\mathrm{T}}\widehat{K}^{-1}g\leqslant 1\}$ и $\overset{\circ}{\mathscr{F}}=\{g:g^{\mathrm{T}}\overset{\circ}{K}{}^{-1}g\leqslant 1\}$, где $g=(g_1, g_2, \ldots, g_m)^{\mathrm{T}}$ — текущий вектор, описывающий поверхность эллипсоида рассеяния; $\widehat{K}=\|\widehat{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ — корреляционная матрица погрешностей определения вектора Q, реализуемая по результатам измерений величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; $\overset{\circ}{K}=\|\overset{\circ}{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ — заданная корреляционная матрица погрешностей определения вектора Q.

Заметим, что поскольку координаты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, как и величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, являются функциями времени, вектор $\widehat{X}$ при решении задачи (1)—(2) также оказывается зависящим от времени.

Для практики более важное значение имеет другая задача, когда координаты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ определяются путем статистической обработки результатов дискретных измерений величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ на некотором интервале времени $[t_{\text{н}}, t_{\text{к}}]$. При этом статистическое усреднение полученных результатов измерений позволяет в общем случае снизить требования к точности измерений величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Уровень снижения требований зависит, с одной стороны, от объема выборки и, с другой — от метода статистической обработки.

Ниже рассматривается задача оценки требований к точности измерений величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ по заданным требованиям к точности определения координат $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ при следующих предположениях:

величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ измеряются в дискретные моменты $t_{h\nu}$, а результаты обработки выдаются в момент t, где $h=1, 2, \ldots, r$; $\nu=1, 2, \ldots, n_h$ на интервале $[t_н, t_к]$;

координаты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, являющиеся функциями времени, аппроксимируются полиномами

$$Q=\mathrm{A}\tau,$$

где $\mathrm{A}=\{a_{ij}\}$, $i=1, \ldots, m$; $j=0, 1, \ldots, s$; — матрица коэффициентов полиномов размерностью $m\times(s+1)$; s — заданная степень полиномов; $\tau = \begin{Vmatrix} (t-t_0)^0 \\ (t-t_0)^1 \\ \vdots \\ (t-t_0)^s \end{Vmatrix}$ — вектор-столбец; t_0 — некоторый фиксированный момент времени;

погрешности измерений величин α_l, $l=1, 2, \ldots, r$, случайны, статистически независимы и имеют веса $x_l = 1/\sigma^2_{\alpha_l}$, $l=1, 2, \ldots, r$;

результаты измерений на временном интервале $[t_н, t_к]$ сглаживаются по методу наименьших квадратов [2].

Ставится задача: определить такие значения $\hat{x}_l$, $l=1, 2, \ldots, r$, при которых достигается наилучшее приближение матрицы $\hat{K}$ к матрице $\mathring{K}$, минимизирующее функцию Φ.

В соответствии с [1] рассмотрим функцию $\Phi=|\hat{K}^{-1}-\mathring{K}^{-1}|^2$, которая нелинейна как относительно величин $x_1, x_2, \ldots, x_r$, так и относительно времени $t\in[t_н, t_к]$, т. е. $\Phi=\Phi(X, t)$. Функция $\Phi=\Phi(X, t)$ зависит от характера движения объекта, длины интервала $[t_н, t_к]$, на котором производится аппроксимация, количества измерений на этом интервале и других параметров.

Поскольку в качестве критерия точности определения вектора Q в некоторой точке используется эллипсоид $\mathring{\mathscr{F}}$, то при движении этой точки и связанного с ней эллипсоида на интервале $[t_н, t_к]$ образуется некоторая (в общем случае изогнутая) поверхность в виде «трубки». Аналогично этому при перемещении расчетного эллипсоида $\hat{\mathscr{F}}$ на том же временном интервале образуется другая «трубка». При движении вдоль траектории форма эллипсоида изменяется «трубка» представляет собой огибающую семейства этих эллипсоидов, расположенных на интервале $[t_н, t_к]$. При определении требований к точности измерений будем исходить из условия, что расчетная «трубка» должна располагаться полностью внутри заданной во всех точках интервала $[t_н, t_к]$. Однако аналитическое описание такого условия в явном виде очень сложно.

В связи с этим требования к точности измерений будем определять, основываясь на выполнении условий внутреннего расположения расчетной «трубки» относительно заданной только в граничных точках интервала $[t_н, t_к]$ (при необходимости задача может быть решена и в других точках внутри интервала $[t_н, t_к]$). Это позволит, с одной стороны, упростить решение задачи, а с другой — обеспечить экономию времени счета на ЭВМ.

Определим условия, при которых расчетная «трубка» находится полностью внутри заданной. Для этого преобразуем симметрическую матрицу $\mathring{K}^{-1}$ к диагональному виду [3]

$$\Lambda = L^{\mathrm{T}} \mathring{K}^{-1} L, \tag{3}$$

где Λ — диагональная матрица порядка m с элементами λ_i ($i=1, 2, \ldots, m$) на главной диагонали; L — ортогональная матрица порядка $m \times m$.

Далее пронормируем матрицу Λ по формуле

$$\Lambda B = E. \tag{4}$$

Здесь B — диагональная матрица с элементами $b_i = \lambda_i^{-1/2}, i=1, 2, \ldots, m$; E — единичная матрица порядка m.

Для рассматриваемого случая корреляционная матрица $\hat{K}$ имеет вид

$$\hat{K} = TPT^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

где P — корреляционная матрица оценок коэффициентов полиномов (размерности $m(s+1) \times m(s+1)$), определяемая по формуле

$$P = \left[\sum_{h=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n_n} T_{h\nu}^{\mathrm{T}} J_{h\nu}^{\mathrm{T}} x_h J_{h\nu} T_{h\nu} \right]^{-1},$$

$$J_{h\nu} = \left(\frac{\partial \alpha_h}{\partial Q_1}, \frac{\partial \alpha_h}{\partial Q_2}, \ldots, \frac{\partial \alpha_h}{\partial Q_m} \right)_\nu \quad (h = 1, 2, \ldots, r; \; \nu = 1, 2, \ldots, n_h)$$

— вектор-строка частных производных от h-й измеряемой величины в ν момент времени на интервале $[t_{\text{н}}, t_{\text{к}}]$; $T_{h\nu}$ — матрица размерности $m \times m(s+1)$ вида

$$T_{h\nu} = \left\| \begin{matrix} (t_{h\nu}-t_0)^0, (t_{h\nu}-t_0)^1, \ldots, (t_{h\nu}-t_0)^s & & 0 \\ & (t_{h\nu}-t_0)^0, (t_{h\nu}-t_0)^1, \ldots, (t_{h\nu}-t_0)^s & \\ 0 & \ddots & \\ & & (t_{h\nu}-t_0)^0, (t_{h\nu}-t_0)^1, \ldots, (t_{h\nu}-t_0)^s \end{matrix} \right\| \left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right\} m \text{ строк},$$

T — матрица размерности $m \times m(s+1)$, имеющая вид

$$T = \left\| \begin{matrix} (t-t_0)^0, (t-t_0)^1, \ldots, (t-t_0)^s & & 0 \\ & (t-t_0)^0, (t-t_0)^1, \ldots, (t-t_0)^s & \\ 0 & \ddots & \\ & & (t-t_0)^0, (t-t_0)^1, \ldots, (t-t_0)^s \end{matrix} \right\| \left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right\} m \text{ строк}.$$

Производя преобразования (3) и (4) над матрицей $\hat{K}^{-1}$, получим

$$C = L^{\mathrm{T}} \hat{K}^{-1} L; \quad L = B^{\mathrm{T}} C B.$$

Далее приведем симметрическую матрицу L к диагональному виду

$$D = V^{\mathrm{T}} L V,$$

где V — ортогональная матрица порядка m, определенная для матрицы L; D — диагональная матрица с элементами d_i ($i=1, 2, \ldots, m$) на главной диагонали. Тогда определяемое условие запишется в виде [1, 4]

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} |d_i| \geqslant 1, \quad t \in [t_{\text{н}}, t_{\text{к}}], \tag{6}$$

в силу того что матрица $\hat{K}$, как следует из (5), зависит от t. Поскольку элементы d_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ являются функциями вектора X, т. е. $d_i = f_i(X)$, соотношения (6) определяют в неявной форме условия, накладываемые на вектор X, при которых выполняются требования внутреннего расположения расчетной «трубки» относительно заданной.

Введем обозначение

$$G_t(x) = \sum_{i=1}^{m} |d_i(x)| - 1.$$

Теперь задачу обоснования требований к точности расчета величин $x_1, x_2, \ldots, x_r$ на временном интервале $[t_н, t_к]$ сформулируем следующим образом:

Определить вектор $\hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_r)$, удовлетворяющий равенству

$$\Phi(x, t) = \min_{x} \min_{t=t_н, t_к} \Phi(x, t), \quad t \in [t_н, t_к], \tag{7}$$

при ограничениях

$$G_t(x) \geqslant 0, \quad t \in [t_н, t_к]; \tag{8}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{9}$$

Как отмечено выше, задачу (7)—(9) будем решать для граничных точек интервала $[t_н, t_к]$, т. е. при $t = t_н, t_к$.

Применим алгоритм, реализующий, как и в [1], так называемый метод «внутренней точки» [5]. При этом задача сводится к следующей последовательности вспомогательных задач:

1. Определить вектор $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_r^*)$ в точках $t = t_н, t_к$, являющийся решением задачи, описанной в [1]. В результате получим два вектора $X_н^*$ и $X_к^*$.

2. Используя начальные точки x^* при $t = t_н, t_к$, определить вектор $\mathring{X} = (\mathring{X}_1, \mathring{X}_2, \ldots, \mathring{X}_r)$, для которого

$$\mathring{X}_i = \max_{н, к}(X_{н_i}^*, X_{к_i}^*), \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{10}$$

3. Используя начальную точку $\mathring{x}$, определить вектор $\hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, X_r)$, удовлетворяющий равенству

$$\Phi(\hat{x}, t) = \min_{x} \min_{t=t_н, t_к} \Phi(\mathring{x}, t), \quad t = t_н, t_к, \tag{11}$$

при ограничениях (8), (9).

Из предложенной схемы следует, что решение задачи [1] в точках $t = t_н, t_к$ носит вспомогательный характер: точки x^* при $t = t_н, t_к$ используются как начальные при построении последовательности приближений к решению задачи (7)—(9). Такое приближение необходимо, так как с его использованием при решении задачи (10) находится «внутренняя точка», для которой выполняются неравенства (8) и (9).

Для решения задачи (11) применяется метод конфигураций с регулируемым шагом, подробное описание которого приведено в работе [6]. Суть этого метода состоит в следующем. Поиск экстремальной точки начинается из некоторой базовой точки, характеризуемой вектором $\mathring{X}$. Придавая поочередно его компонентам приращения $\pm\Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, выбирается вектор $\tilde{X}$, соответствующий точке, в которой значение функции $\Phi = \Phi(x, t)$ ближе к экстремуму. Для последующего цикла поиска выбирается новая базовая точка по правилу $x^{(k+1)} = x^{(k)} + 2(\tilde{x} - \tilde{x}^{(k)})$. Это удваивает длину шага, если направление выбрано правильно.

Если изменение компонент вектора $x^{(k+1)}$ на $\pm\Delta x$ не дает приближения к экстремуму, процесс повторяется с уменьшенной вдвое длиной шага Δx. Поиск экстремальной точки прекращается при выполнении условия

$$|x^{(k+1)}-x^{(k)}|<\varepsilon.$$

Следует отметить, что скорость приближения к экстремуму для этого метода зависит от начальной точки $\overset{\circ}{x}$, начальной длины шага Δx и точности вычислений ε. Особенностью метода конфигураций является то, что с увеличением числа компонент вектора X количество вычислений растет линейно, а поиск экстремальной точки осуществляется вблизи границы области, ограниченной заданным и расчетными эллипсоидами.

Сочетание метода, описанного в [1], и метода конфигураций с регулируемым шагом [6] оказалось весьма успешным. В этом случае метод в [1] использовался как вспомогательный при получении начального приближения в области $G_t(x)\geqslant 0$ определения функции $\Phi=\Phi(x, t)$ для метода конфигураций. Такой подход позволил значительно сократить затраты машинного времени.

Рассмотрим пример. Пусть прямоугольные координаты x, y, z объекта определяются с помощью полиномов третьей степени путем статистической обработки результатов измерений расстояния (R) до объекта, угла места (ε) и азимута (β), полученных на интервале [10, 20] с с дискретностью 1 с. Требуется вычислить среднеквадратические погрешности ($\sigma_R, \sigma_\varepsilon, \sigma_\beta$), постоянные на интервале [10, 20] с, если требования к точности определения координат x, y, z заданы в виде диагональной матрицы

$$\hat{K}=\begin{Vmatrix}\sigma_x^2 & & 0\\ & \sigma_y^2 & \\ 0 & & \sigma_z^2\end{Vmatrix}\quad(\sigma_x^2=100,\ \sigma_y^2=100,\ \sigma_z^2=100),$$

элементы матрицы А коэффициентов полинома имеют значения

$$\mathrm{A}=\begin{Vmatrix}9{,}3\cdot 10^5, & -5{,}6\cdot 10^3, & 1{,}0, & -0{,}02\\ 2{,}8\cdot 10^5, & -1{,}3\cdot 10^3, & -3{,}0, & -0{,}01\\ 3\cdot 10^5, & -1{,}8\cdot 10^3, & 0{,}12, & -0{,}01\end{Vmatrix},$$

а измерительное средство в системе x, y, z расположено в точке с координатами $x_0=-1{,}4\cdot 10^5$, $y_0=0$, $z_0=-9{,}2\cdot 10^4$. В результате решения задачи на основе применения описанного выше алгоритма получаем $\sigma_R=10{,}3$, $\sigma_\varepsilon=1{,}5\cdot 10^{-5}$, $\sigma_\beta=1{,}6\cdot 10^{-6}$.

Время, необходимое для решения этого примера на ЭВМ типа М-220, составляет не более 5 с.

Авторы выражают глубокую благодарность В. И. Коробову за постоянное внимание и большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулаев Ш.-С. О., Волков В. А., Пицык В. В. Определение требований к точностным характеристикам измерительных средств сложной измерительной системы.— «Автометрия», 1976, № 5, с. 35—41.
2. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
4. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Фиакко А., Мак-Кармик Г. Нелинейное программирование. М., «Мир», 1972.
6. Уайлд Д. Методы поиска экстремума. Пер. с англ. А. Н. Кабалевского. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию 27 сентября 1976 г.