

Р. Д. БАГЛАЙ
(Новосибирск)

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО КИНОФОРМАМ И ИСКАЖЕННЫМ ГОЛОГРАММАМ

Задача синтеза киноформов. Более общая задача, включающая синтез киноформов или, что то же, синтез фазовых фильтров, состоит в следующем. По положительным финитным функциям $f(x, y) \in L_2(S)$ и $W(u, v) \in L_2(\Omega)$, заданным соответственно в области оригиналов и образов, требуется определить такую функцию фазы $\varphi(u, v)$, которая доставляет минимум функционалу

$$J(\varphi) = \|f - \overset{\vee}{W} e^{i\varphi}\|_{L_2(S)}, \quad (*)$$

где $\overset{\vee}{\xi}$ означает обратное преобразование Фурье или родственное ему преобразование (Френеля, Радона, Ганкеля) функции ξ .

При синтезе фазовых фильтров предполагается, что $W = \begin{cases} c, & (u, v) \in \Omega; \\ 0, & (u, v) \notin \Omega; \end{cases}$ c — числовой параметр, а масштаб области Ω и величину параметра c можно менять в широких пределах.

К аналогичной постановке приводят задачи синтеза электронных фильтров, антенн, радиолокационных сигналов по функции неопределенности или по корреляционной функции [1].

Математически точное решение задачи (*) неизвестно. Трудности обусловлены модулем интеграла в (*). Отсутствие аналитического метода, позволяющего находить функцию φ_0 , доставляющую глобальный минимум функционалу $J(\varphi)$, стимулировало поиск приближенных схем решения.

В настоящей работе излагаются экспериментальные факты, поэтому, не вдаваясь в математическое обоснование рассмотренных нами схем построения приближенных решений, укажем лишь алгоритмы необходимых действий.

Схема 1:

f умножается на $e^{i\psi_0}$, где ψ_0 — реализация случайной стационарной функции Ψ такой, что $e^{i\Psi}$ не коррелирована и $M\Psi = 0$, M — математическое ожидание;

выполняется прямое преобразование Фурье: $\overset{\vee}{f} e^{i\psi_0} = \eta_1 e^{i\varphi_1}$

W умножается на $e^{i\varphi_1}$ и выполняется обратное преобразование

Фурье: $W e^{i\varphi_1} = f_1 e^{i\psi_1}$;

модуль $|f_1 e^{i\psi_1}|$ принимается за приближенное решение задачи (*).

Повторяя эти операции при различных реализациях и усредняя результаты, получаем усредненное решение [2, 3].

Схема 2:

f умножается на $e^{i\psi_0}$, где ψ_0 — произвольная начальная фаза, и вы-

полняется прямое преобразование Фурье: $\overset{\vee}{f} e^{i\psi_0} = \eta_1 e^{i\varphi_1}$;

W умножается на $e^{i\varphi_1}$ и выполняется обратное преобразование

Фурье: $W e^{i\varphi_1} = f_1 e^{i\psi_1}$;

вычисляется норма $\|f - f_1\|$.

Этим завершается первый итерационный цикл. Если норма $\|f - f_1\|$ велика, процесс продолжается:

f умножается на $e^{i\psi_1}$ и выполняется прямое преобразование:
 $f e^{i\psi_1} = \eta_2 e^{i\psi_2};$
 W умножается на $e^{i\psi_2}$ и выполняется обратное преобразование:
 $W e^{i\psi_2} = f_2 e^{i\psi_2};$

вычисляется норма $\|f - f_2\|$ и т. д.

Итерирование продолжается до тех пор, пока расстояние между f и f_k , $k=1, 2, \dots$, уменьшается. Если полученная в итоге норма $\|\cdot\|$ велика, процесс начинается сначала при другой начальной фазе $\psi_0^1[1]$.

Схема 3:

Искомую функцию φ определяем из нелинейного эллиптического уравнения

$$f^2(u, v) (\varphi_{u,u}'' \varphi_{v,v}'' - (\varphi_{u,v}'')^2) = (2\pi)^{-2} W^2(u, v). \quad (1)$$

Восстановление изображений по киноформам. Условия проведения экспериментов следующие. Изображения задавались значениями в точках на равномерной сетке 64×64 . Эффект рассеянного света моделировался с использованием датчика псевдослучайных чисел (шума) с равномерным распределением. Преобразование Фурье выполнялось программой БПФ (быстрое преобразование Фурье). Поскольку алгоритм БПФ дает периодическую функцию, то при вычислениях функции фазы волнового фронта ее можно повторять со смещением на период и таким образом обеспечить избыточность, необходимую для восстановления изображения предмета оптическими средствами. В данных ниже экспериментах восстановление выполнялось на машине, а значения функции фазы вычислялись на одном массиве 64×64 точек. Модули исходного и восстановленного изображений выводились на печать шестью градациями яркости.

Основные цели эксперимента: 1) на примерах, представляющих прикладной интерес, проследим зависимость той части энергии плоской волны, которая идет на формирование восстановленного изображения, от величины дисперсии шума и убедимся, существен ли факт случайного изменения функции фазы при восстановлении по одному итерационному циклу (схема 1); 2) проиллюстрируем характер искажений, возникающих при уменьшении дисперсии шума до нуля, получим усредненное изображение и приведем результаты применения итерационной процедуры (схема 2); 3) исследуем эффективность восстановления в зависимости от размеров изображения при различных величинах дисперсии шума; 4) дадим примеры восстановления изображений при выборе функции фазы из уравнения (1); 5) сравним характерные особенности восстановленных изображений с использованием киноформов и диффузных голограмм.

В первом эксперименте исходная симметричная функция $f(n, m)$, $-32 \leq n, m \leq 32$, задавалась единицами на сетке 24×24 и нулями — в остальных точках указанной области определения (рис. 1, а). Такого вида функции в дальнейшем называем бинарными. Прикладной интерес к восстановлению бинарных функций обусловлен, в частности, тем, что они могут представлять страницу памяти, которая затем кодируется

в виде киноформов или голограмм. Модуль ее Фурье-образа $|f e^{i\psi_0}|$, где ψ_0 — реализация случайной функции Ψ с равномерным распреде-

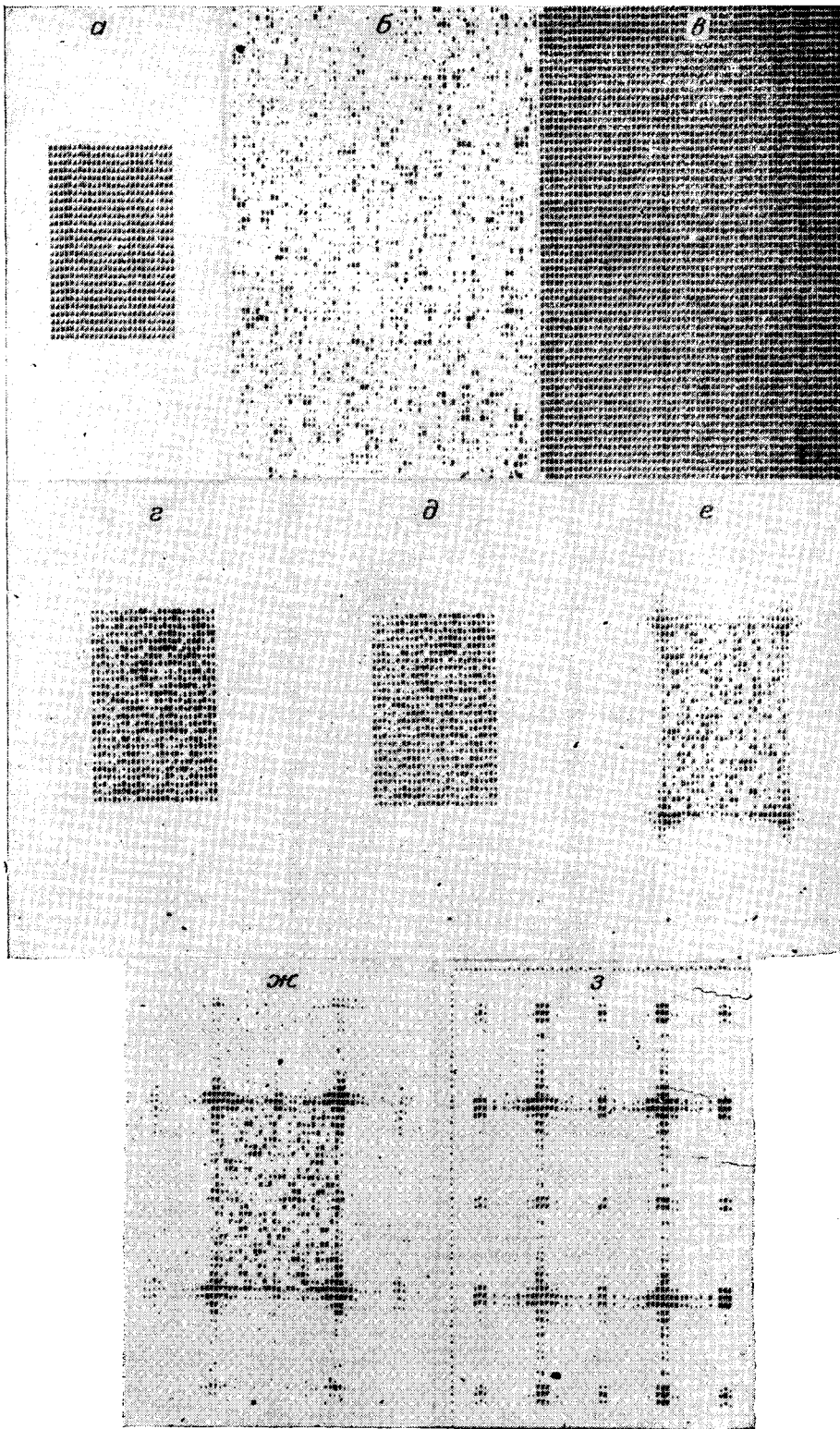


Рис. 1.

лением при $M\Psi=0$ и $|\Psi_{\max}|=\pi$, показан на рис. 1, б. Восстановленная функция $|We^{i\varphi_1}|$ (где $W(n, m)=c$, $-32 \leq n, m \leq 32$ (см. рис. 1, в) и $\varphi_1 = \arg fe^{i\varphi_0}$) дана на рис. 1, г. Замечаем, что ее силуэт визуально воспринимается легко, но значения в различных точках, образующих изображение, сильно «разбросаны». Отношение энергии, сосредоточенной в точках, принадлежащих области силуэта восстановленного изображения ко всей энергии, рассеянной на поле 64×64 точек, с точностью до единицы последнего знака составило 85%. Практически ничего не изменилось, когда в качестве φ_0 использовалась реализация бинарного шума амплитуды π или регулярная функция, например знакопеременная, линейно нарастающая по амплитуде от нуля до π по обоим аргументам. Важно, однако, чтобы спектр Фурье функции φ_0 был достаточно богатым высшими гармониками, т. е. был близок к равномерному.

Результаты эксперимента с той же функцией f при $|\Psi_{\max}|=\pi/4$; $\pi/16$; $\pi/64$; 0 представлены соответственно на рис. 1, д—з. При этом получены следующие значения энергии: 82, 70, 49 и 31%. Эти и аналогичные эксперименты с другими бинарными функциями показали, что изменения величины $|\Psi_{\max}|$ в диапазоне $\pi \div \pi/2$ оказывают малое влияние на величину энергии, которая падает на множество точек, охваченных контуром восстановленного изображения.

Результат усреднения по двадцати восстановленным реализациям дан на рис. 2, а. Одномерные функции, представляющие профили сечений по одной и той же строке восстановленного изображения до усреднения (точки) и после усреднения (сплошная линия), приведены на рис. 2, б. Сравнивая их, видим, что усреднение дает хороший результат. Но в физическом эксперименте воспользоваться им трудно.

Та же функция, полученная по второй схеме после пяти итерационных циклов, дана на рис. 2, в. Сравнивая ее с результатом, полученным после одного цикла (см. рис. 1, г), убеждаемся в заметном улучшении восстановленного изображения. Оно практически оказалось таким же, как и усредненное (см. рис. 2, а). Однако итерирование, примененное к другой бинарной функции (рис. 3, а), не привело к заметному успеху: результат после пяти циклов (рис. 3, б) остался таким же, как и после первого.

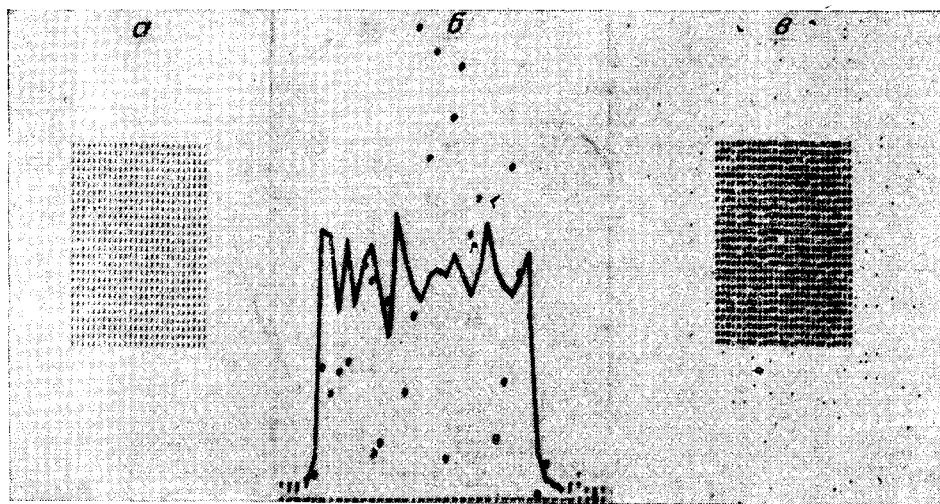


Рис. 2.

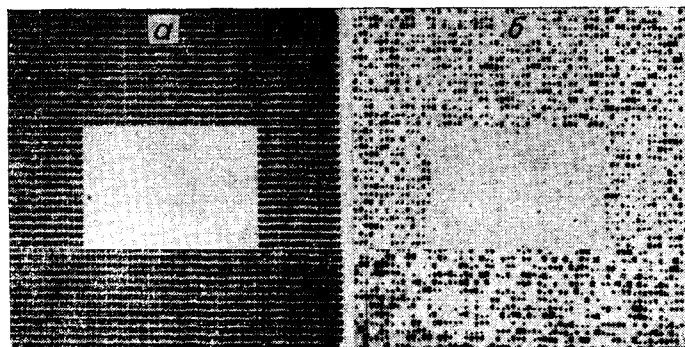


Рис. 3.

Небинарные исходные функции и примеры их восстановления при $|\Psi_{\max}| = \pi$ даны на рис. 4, а, б и 5, а, б.

Для сравнения здесь уместно указать на результаты восстановления изображений по части диффузной голограммы (рис. 15, г, д). Отметим, что при использовании части голограммы наблюдается ситуация, аналогичная предыдущей: визуально хорошо выделяется силуэт восстановленной фигуры, но значения в различных ее точках сильно разбросаны. Это обстоятельство создает препятствие для многих приложений голограмм и киноформов.

Как показали эксперименты, успех применения фазовых фильтров зависит от размеров исходного предмета. На рис. 6, а—в даны восстановленные при $|\Psi_{\max}| = \pi$ изображения слова SOS различных размеров. В последнем случае решение «развалилось». Другой пример (рис. 7, а, б) отражает неудачную попытку получить изображение цифры 6 малых размеров, хотя та же картина по диффузной голограмме легко

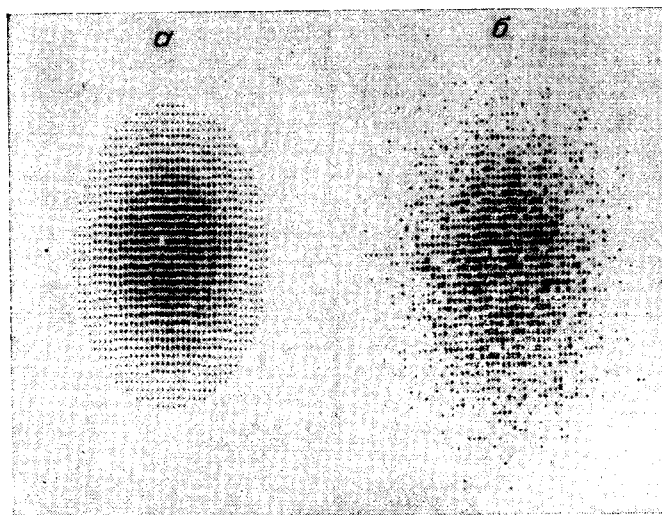


Рис. 4.

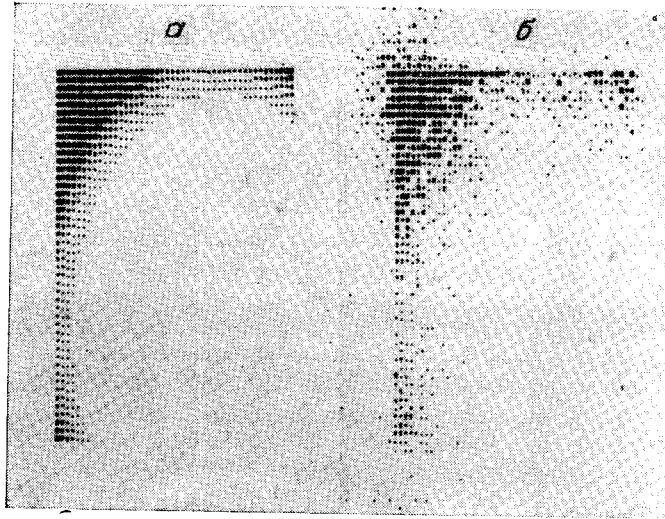


Рис. 5.

восстанавливается (рис. 7, в), в том числе с мультиплицированием (рис. 7, з). Однако, уменьшая величину $|\Psi_{\max}|$ до значений $\pi/2$, из киноформа вместо рис. 6, в получаем рис. 6, г. Таким образом, при синтезе киноформов для предметов малых размеров возникает задача компромиссного выбора величины $|\Psi_{\max}|$.

Результаты, полученные с применением третьей схемы решения, т. е. когда искомая функция фазы определялась из уравнения (1), даны на рис. 8, в и 9, в. При этом бинарные функции (см. рис. 8, а, 9, а) задавались в области Фурье-образов. Обратные их отображения при $\varphi=0$ даны соответственно на рис. 8, б, 9, б, а при φ , выбранных из уравнения (1), — на рис. 8, в, 9, в. Здесь, как видно из рис. 8, в, возникают характерные искажения, обусловленные френелевскими осцилляциями, амплитуда которых нарастает к краям восстановленного изображения, где f и W нерегулярны. Среднеквадратичная ошибка, возникающая из-за этих искажений, уменьшается при увеличении области Ω и в пределе ($\Omega \rightarrow \infty$) стано-

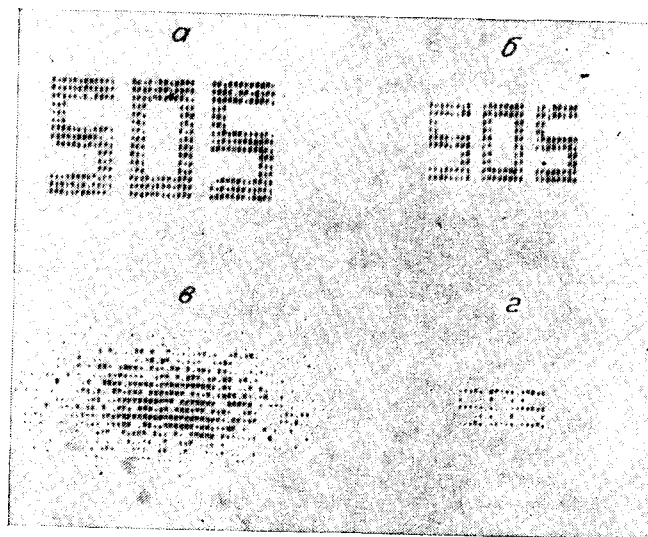


Рис. 6.

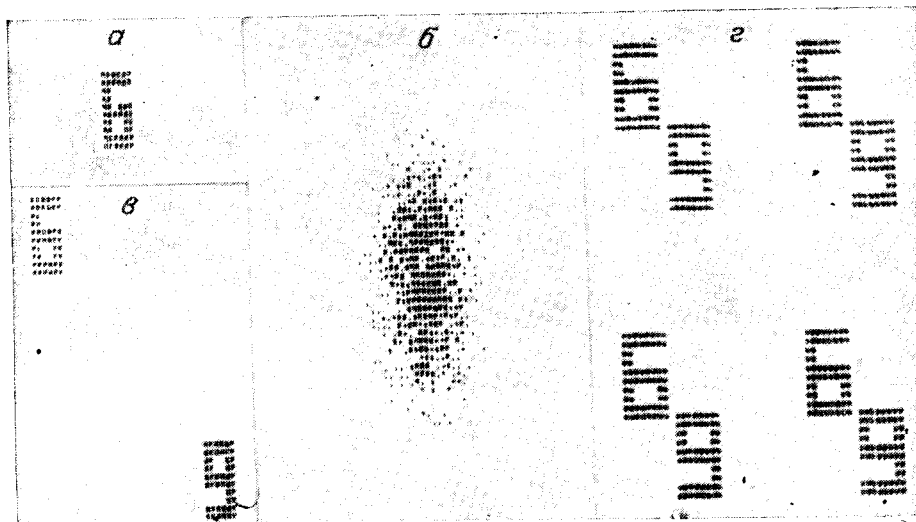


Рис. 7.

вится сколь угодно малой. Для практически приемлемых величин Ω результат восстановления может быть значительно улучшен, если функция W , задаваемая в области Фурье-образов, не будет иметь резких перепадов.

Восстановление изображений по искаженным голограммам. Для многих приложений актуальна задача восстановления функции $f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$ по квадрату модуля ее преобразования Фурье $|\hat{f}|^2$ — или родственной ему преобразований. Решение этой задачи в указанном ниже смысле дает метод голографирования [4]. Вместо f рассматривают функцию $\theta(x) = f(x) + \delta(x_0)$ или, что то же, $\hat{\theta}(x) = \hat{f}(x) + \hat{\delta}(x_0)$, где $\delta(x)$ — импульс Дирака. Поскольку обратное преобразование

$|\hat{\theta}(x)|^2 = \theta(x) * \theta(-x)$, где $*$ — свертка, то имеем

$$(f(x) + \delta(x_0)) * (f(-x) + \delta(-x_0)) = f(x) + f(-x) + \delta(x_0) + f(x) * f(-x).$$

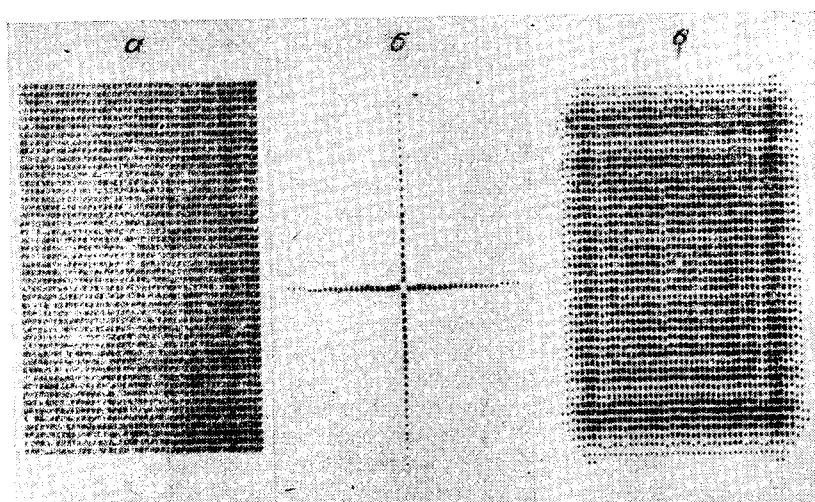


Рис. 8.

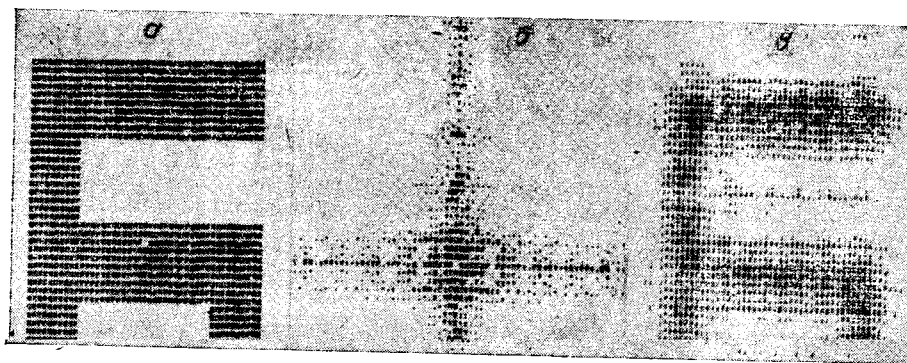


Рис. 9.

В предположении, что вне интервала $[x_1, x_2]$ $f(x) \equiv 0$ и расстояние $\rho = |x_2 - x_1| < |x_1 - x_0|$, слагаемые $f(x)$, $f(-x)$ и $\delta(x_0) + f(x) * f(-x)$ пространственно разделены и могут рассматриваться порознь.

В приложениях к оптике значения этого метода подчеркиваются двумя обстоятельствами: легкостью выполнения преобразований Фурье функций двух независимых переменных и простотой регистрации квадрата модуля волнового фронта.

Возможности «цифровой» голографии, т. е. возможности синтеза голограмм и восстановления по голограммам изображений с помощью цифровых ЭВМ, рассматривались в ряде работ [5]. Ниже изложены результаты численных экспериментов восстановления изображений по искаженным голограммам.

Относительно машинных программ, с использованием которых выполнялась работа, заметим следующее. Для вычисления двумерных интегралов свертки использовался алгоритм быстрого преобразования Фурье на сетке 64×64 точек. Вывод изображений осуществлялся шестью градациями на печатающее устройство машины.

Эксперимент проводился в приближениях Френеля. Начала декартовых координат в плоскости предмета и параллельной ей плоскости голограммы располагались на кратчайшем расстоянии $z_0 = 100$. Величины других физических параметров выбирались следующими: длина волны при синтезе и восстановлении $\lambda = 0,01$ и соответственно волновое число $k = 0,0628$; шаг $h = (\lambda z_0 / N)^{1/2} = 64$ дискретной сетки в плоскости предмета и голограммы определялся из условия применимости алгоритма быстрого преобразования Фурье; значения координат (x_r, y_r, z_r) точечного источника сферических волн, используемого при синтезе голограмм, выбирались в зависимости от цели эксперимента (см. ниже); координаты (x_s, y_s, z_s) точечного источника, используемого при восстановлении, определялись из условия фокусировки на действительную или мнимую часть изображения.

Изображения исходного предмета и его голограммы, полученной при $x_r = 15$, $y_r = 15$, $z_r = 100$, даны соответственно на рис. 10, а, б; действительная и мнимая части восстановленного изображения — на рис. 10, в. (Здесь и далее слагаемые $\delta(x_0) + f(x) * f(-x)$ при выводе картин на печатающее устройство не учитывались.) Поскольку в данном случае $z_r = z_0$, условие фокусировки выполняется одновременно для

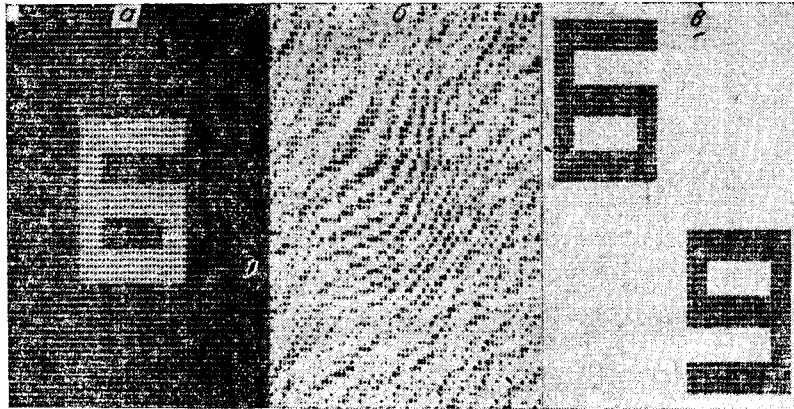


Рис. 10.

обеих частей восстановленного изображения. Напомним это условие:

$$z_{\phi} = (1/z_a \pm 1/z_r \pm 1/z_0),$$

где верхние знаки соответствуют мнимой части, нижние — действительной; $|z_{\phi}|$ — расстояние от голограммы до восстановленного изображения, при этом, если z_{ϕ} положительно, получаем мнимую его часть, когда z_{ϕ} отрицательно — действительную.

Изображение того же предмета, полученное по голограмме, вычисленной при $x_r=15$, $y_r=15$, $z_r=200$, показано на рис. 11, а. Здесь

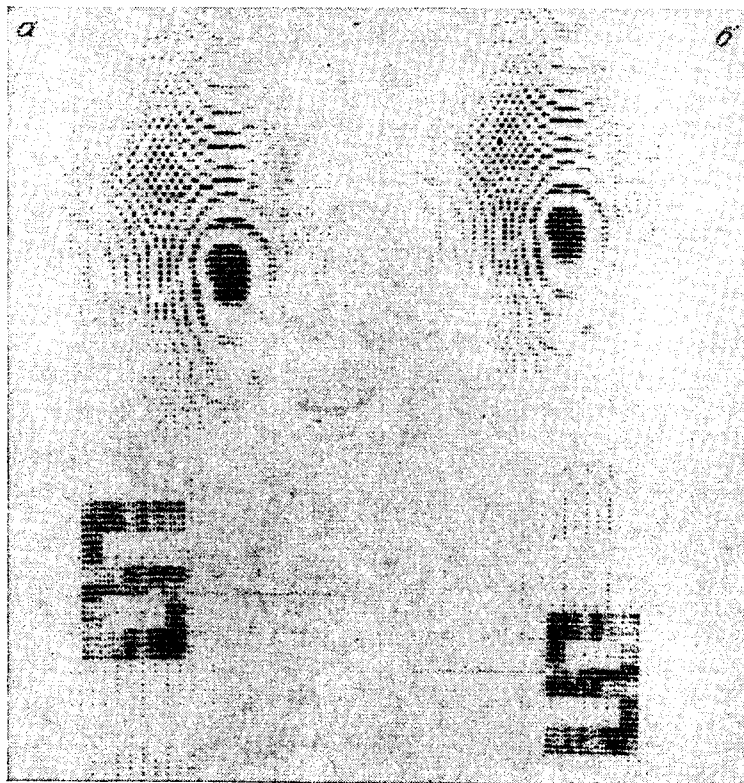
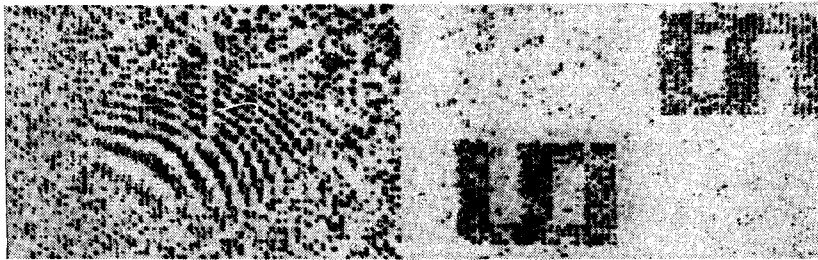
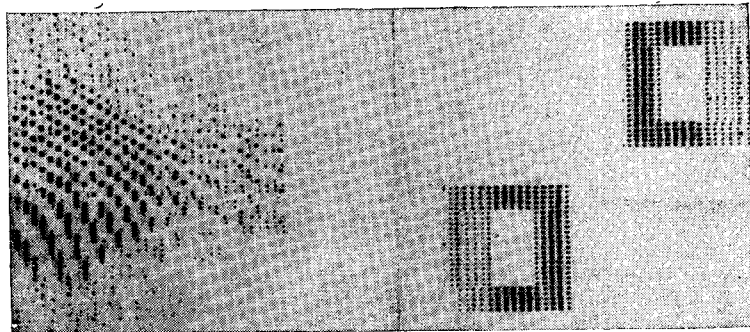


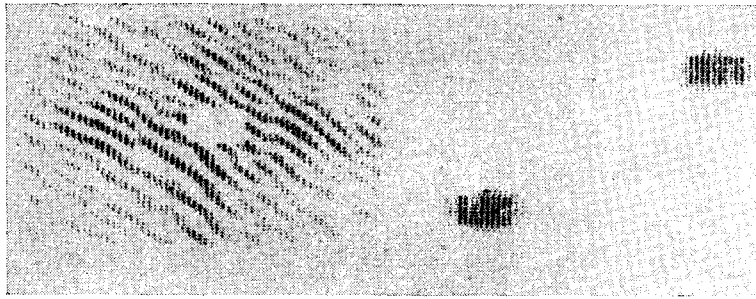
Рис. 11.



Puc. 12.



Puc. 13.



Puc. 14.

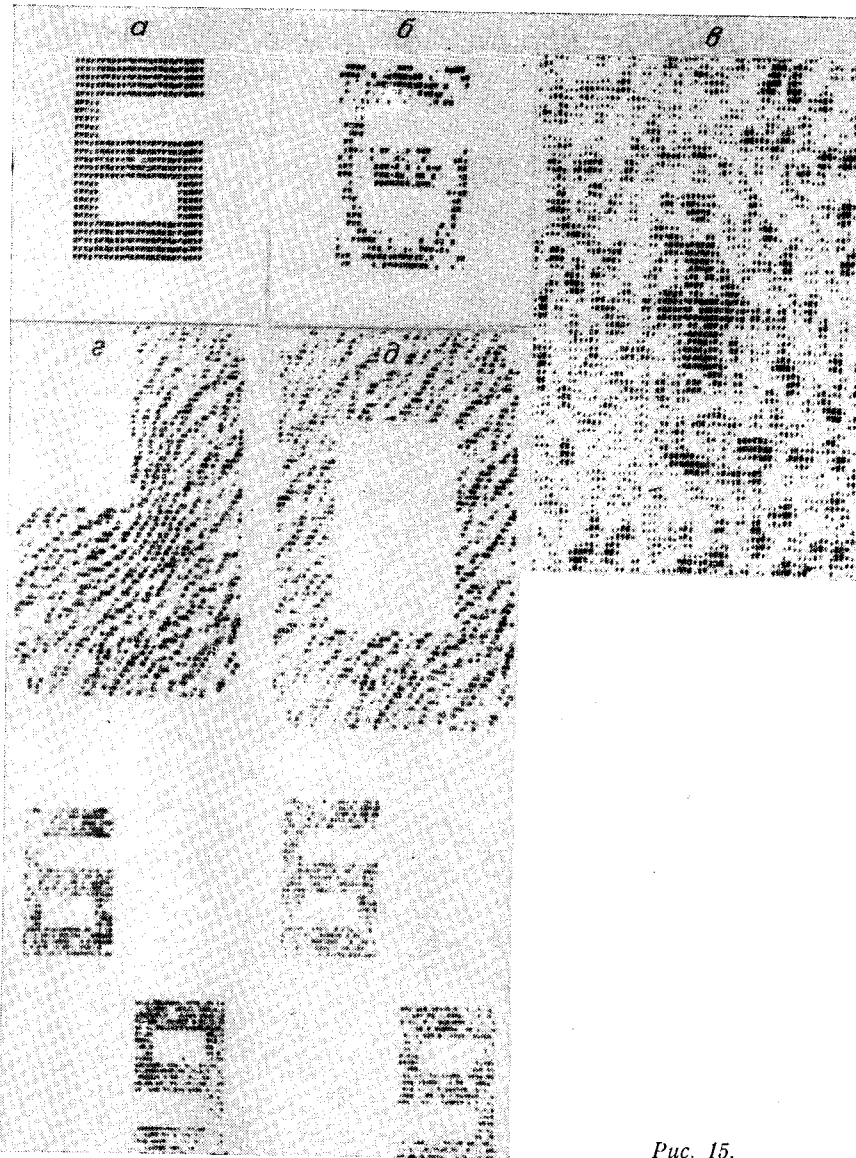
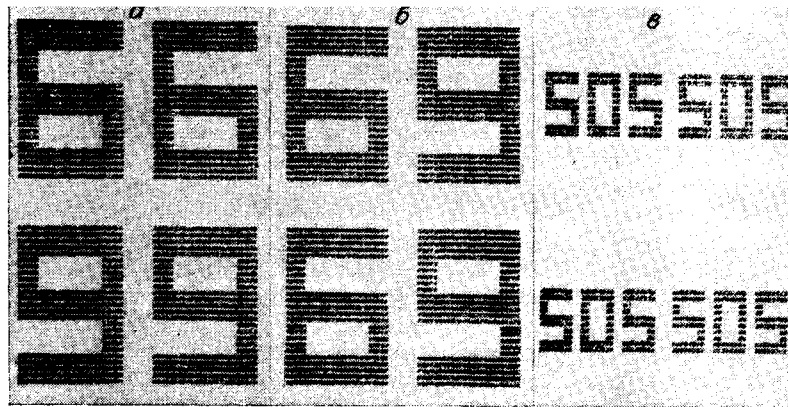


Рис. 15.

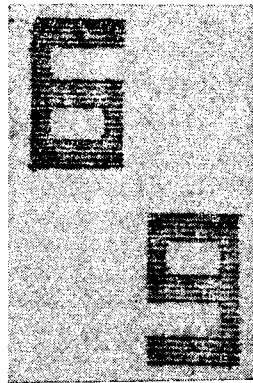
условие фокусировки выполнено для мнимой части. Расфокусированная действительная часть создает заметную помеху. Выполнение условий фокусировки на действительную часть приводит к аналогичному эффекту (см. рис. 11, б).

Влияние аддитивного равномерно распределенного белого шума с амплитудой, примерно равной 20% от максимального значения функции голограммы, иллюстрируется рис. 12. Как видим, добавление шума к голограмме приводит к характерным искажениям восстановленного изображения, но на зрительное восприятие картины они оказывают малое влияние.

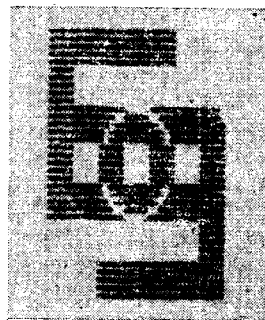
Большие последствия вызывает устранение части голограммы (рис. 13, 14). В первом из приведенных примеров удалена (заменена нулями) верхняя половина так называемой безлинзовой Фурье-голограммы. Ее элементы однозначно связаны с координатами голографируемого предмета. Этот факт иллюстрирует рис. 13.



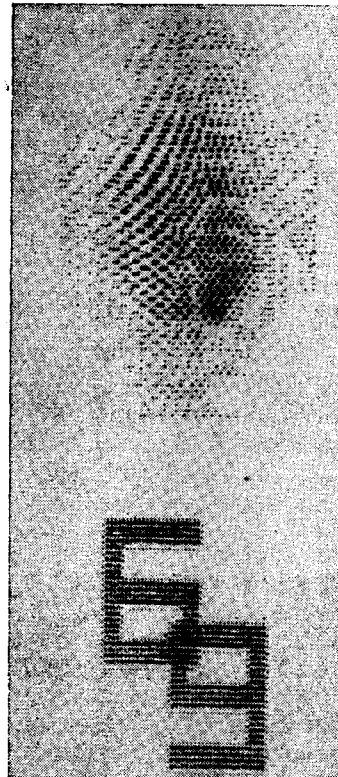
Puc. 16.



Puc. 17.



Puc. 19.



Puc. 18.

Удаление частей диффузной голограммы приводит к совершенно иному эффекту. На рис. 15, а, б представлены модуль изображения исходного предмета и действительная часть, которая подтверждает диффузный характер освещения предмета. На рис. 15, в дан квадрат модуля преобразования Френеля. Характер искажений при удалении различных частей голограммы иллюстрирует рис. 15, г, д. Здесь, как приводит к его большому мультиплицированию (см. рис. 7, г). Качество восстановленных картин при этом не ухудшается. Мультиплицирование слова SOS дано на рис. 16, в.

Эффект, к которому приводит нелинейное искажение, проиллюстрирован рис. 17. Эта картина получена по голограмме, значения в каждой точке которой заменены арифметическими значениями их квадратичного корня.

Примеры восстановления по голограммам, полученным при малых значениях координат (x_r, y_r) источника опорной волны, даны на рис. 18, 19. В этих случаях возникают искажения за счет наложения изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Вакман, Р. М. Седлецкий. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. М., «Сов. радио», 1973.
2. L. B. Lisen, P. M. Hirsh, J. A. Jordan. The kinoform: a new waveform reconstruction device.—“IBM Res. Dev.”, 1969, vol. 13, p. 150—154. («Зарубеж. радиоэлектроника», 1969, № 12, с. 41—49.)
3. D. Kermsch. Image reconstruction from phase information only.—“J. Opt. Soc. Amer.”, 1970, vol. 60, p. 15—17.
4. А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. М., «Мир», 1971.
5. Т. Хуанг. Цифровая голография (обзор). Применение голографии. М. «Мир», 1973.

Поступила в редакцию 19 ноября 1976 г.

УДК 621.315.592 : 772.99

**В. П. КОРОНКЕВИЧ, А. Е. МЕЕРСОН, В. Г. РЕМЕСНИК,
Г. П. ЧЕИДО, А. М. ЩЕРБАЧЕНКО**
(Новосибирск)

СИНТЕЗ КИНОФОРМОВ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

Киноформ — фазовый элемент переменной оптической толщины, преобразующий падающий на него волновой фронт света по заданному закону для получения изображения с минимальными потерями световой энергии. Изменения оптической толщины в киноформе не превышают длины волны и в общем случае рассчитываются с помощью ЭВМ. Для изготовления киноформа [1] фаза рассеянной волны вычисляется по модулю 2π и записывается на транспарант в виде изменения оптической плотности с помощью многоградационного самописца. Затем