2. Ю. Шрейдер. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., Физматгиз, 1959.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. А. М. Цирлин. Решение задач оптимального управления посредством приведения к простейшей изопериметрической задаче.— «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1968, № 5, с. 151—159.

Поступила в редакцию 8 апреля 1974 г.;
окончательный вариант — 10 октября 1976 г.

УДК 519.24

О. Ю. БОРЕНШТЕЙН, Б. И. КОГАН, О. Л. СОКОЛОВ
(Ленинград)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЕРИОДОГРАММ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. В работах [1, 2] изучались статистики энергетического спектра нестационарного случайного процесса (НСП). В настоящей статье вводится определение асимптотической спектральной плотности НСП, связанное с расширением понятия периодограммы стационарного случайного процесса (ССП) на нестационарный случайный процесс.

В качестве асимптотически несмещенной оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса может быть использована периодограмма вида

$$\hat{S}_x(f, T) = \frac{1}{T}\left|\int_0^T x(\tau)\, e^{-2\pi i f\tau} d\tau\right|^2. \tag{1}$$

Теория таких оценок хорошо известна (например, [3]). При переходе к нестационарным случайным процессам уместно вместо (1) рассматривать периодограммы вида

$$\hat{S}_x(f, \theta, T) = \frac{1}{T}\left|\int_\theta^{\theta+T} x(\tau)\, e^{-2\pi i f\tau} d\tau\right|^2. \tag{2}$$

Введение параметра θ связано с тем, что периодограммы вида (2) задают в общем случае различные случайные величины в зависимости от сдвига начала отсчета θ. В настоящей работе предлагается определение асимптотической спектральной плотности, оценками для которой являются периодограммы вида (2). Указывается ряд свойств таких оценок, в частности неравенства для смещений и вероятности больших уклонений, а также обобщается одно свойство эргодичности.

Полученные результаты позволяют распространить метод периодограмм на широкий класс нестационарных случайных процессов.

Асимптотическая спектральная плотность квазигармонизуемых случайных процессов и ее статистическая оценка. Допустим, что корреляционная функция R_x процесса X допускает представление вида

$$R_x(\eta, \eta-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\xi\eta} B_x(d\xi, \tau), \tag{3}$$

справедливое при $\eta \geqslant \tau$, $\eta \geqslant 0$.

Процесс X назовем квазигармонизуемым, если норма ядра R_x

$$\|B_x\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{var} B_x(\cdot, \tau)\, d\tau \tag{4}$$

ограничена. Здесь $\operatorname{var} B_x(\cdot, \tau)$ — полная вариация ядра B_x по первой переменной при фиксированном значении τ второй переменной [4]. Для того чтобы пояснить смысл введенного понятия, заметим, что математическое ожидание периодограммы $\hat{S}_x(f, \theta, T)$ может быть представлено в виде

$$E[\hat{S}_x(f, \theta, T)] = \frac{1}{T}\int_0^T dz \int_{-z}^{z} e^{-2\pi i f\tau}\left(\frac{1}{T-|\tau|}\int_0^{T-|\tau|} R_x(\theta+\gamma, \theta+\gamma+ + |\tau|)\, d\gamma\right) d\tau. \tag{5}$$

Теперь с учетом формулы (3) находим, что

$$E[\hat{S}_x(f, \theta, T)] = \frac{1}{T}\int_0^T dz \int_{-z}^{z} e^{-2\pi i f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \times \times \frac{(e^{2\pi i\xi(T-|\tau|)}-1)\, e^{2\pi i\xi\theta}}{2\pi i\xi\,(T-|\tau|)} B_x(d\xi, -|\tau|),$$

откуда следует неравенство

$$|E[\hat{S}_x(f, \theta, T)]| \leqslant \|B_x\|. \tag{6}$$

Таким образом, математическое ожидание периодограммы $\hat{S}_x(f, \theta, T)$ ограничено нормой $\|B_x\|$ независимо от значений параметров f, θ, T. Ниже показано также, что условие квазигармонизуемости тесно связано с оценками смещения и вероятностей больших уклонений относительно функционалов вида

$$S_x(f, \theta, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i f\tau} d\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi i\xi(T-|\tau|)}-1)}{2\pi i\xi\,(T-|\tau|)} e^{2\pi i\xi\theta} B_x(d\xi, -|\tau|). \tag{7}$$

Последнее выражение является предельным аналогом соотношения (5) при $T \to \infty$ в том смысле, что для квазигармонизуемых процессов

$$|S_x(f, \theta, T) - E[\hat{S}_x(f, \theta, T)]| \underset{T\to\infty}{\to} 0.$$

Заметим, что если X — стационарный случайный процесс, то

$$S_x(f, \theta, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-2\pi i f\tau} d\tau = S_x(f),$$

где $S_x(f)$ — спектральная плотность процесса X.

На этом основании для квазигармонизуемого процесса X назовем функцию $S_x(f, \theta, T)$ его асимптотической спектральной плотностью. При этом имеет место оценка, аналогичная (6):

$$|S_x(f, \theta, T)| \leqslant \|B_x\|.$$

Асимптотическая спектральная плотность содержит всю информацию о корреляционной функции процесса. Действительно, согласно (7),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f, \theta, T)\, e^{2\pi i f \tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(e^{2\pi i \xi (T-|\tau|)} - 1\right)}{2\pi i \xi (T-|\tau|)} B_x(d\xi, -|\tau|). \qquad (8)$$

$T \to \infty$ несмещенными оценками асимптотической спектральной плотности для квазигармонизуемых процессов. Это указывает на важную аналогию с понятием спектральной плотности стационарного случайного процесса и позволяет более детально исследовать некоторые свойства периодограмм.

Оценки скорости сходимости статистик к теоретическим значениям. Положим $\beta_0 = 2\|B_x\|$, $\beta_1 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau| \operatorname{var} B_x(\cdot, \tau)\, d\tau$ и допустим, что $\beta_1 < +\infty$. В этом случае смещение $\Delta \hat{S}_x(f, \theta, T)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta \hat{S}_x(f, \theta, T)| \leqslant \frac{\ln T}{T} \frac{2\beta_1}{\pi^2} + \frac{1}{T} \beta_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{2\beta_0}{\beta_1}\right). \qquad (9)$$

Эта оценка не зависит от значений параметров f и θ и является бесконечно малой порядка $\ln T/T$ при $T \to \infty$. Анализ дисперсии σ^2 оценки $\hat{S}_x(f, \theta, T)$ показал, что ее значения могут не стремиться к нулю при $T \to \infty$, оставаясь больше некоторой величины.

В силу этого аналогично теории стационарных процессов введем понятие асимптотической спектральной функции, полагая

$$F_x(f, \theta, T) = 2\pi \int_0^f S_x(\lambda, \theta, T)\, d\lambda.$$

Выборочной спектральной функцией процесса X назовем случайную функцию вида

$$\hat{F}_x(f, \theta, T) = 2\pi \int_0^f \hat{S}_x(\lambda, \theta, T)\, d\lambda.$$

Для смещения $\Delta \hat{F}(f, \theta, T)$ может быть получена оценка, являющаяся бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с (9):

$$|\Delta \hat{F}(f, \theta, T)| \leqslant \frac{1}{T} \frac{3}{2} \beta_0 + \frac{\ln T}{T^2} \frac{\beta_1}{\pi^2} + \frac{1}{T^2} \beta_1 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \ln 2 \frac{\beta_0}{\beta_1}\right). \qquad (10)$$

Неравенства (9), (10) были получены по методу $[C, 1]$-суммирования интегралов Фурье [5].

Переход к спектральной функции в теории стационарных случайных процессов тесно связан с исследованием эргодических свойств.

Хорошо известно, например, что непрерывность спектральной функции $F_x=F_x(f)$ для стационарного гауссовского случайного процесса X равносильна его эргодичности, в этом случае выборочные спектральные функции $\hat{F}_x=\hat{F}_x(f, T)$ сходятся с вероятностью 1 к $F_x=F_x(f)$ при $T\to\infty$.

Обобщение эргодического свойства выборочных спектральных функций в случае нестационарных процессов должно состоять в выполнении с вероятностью 1 предельного соотношения

$$\hat{F}_x(f, \theta, T)-F_x(f, \theta, T)\to 0 \text{ при } T\to\infty \tag{11}$$

для любых f и θ. Если при этом учесть, что «хвосты» асимптотической спектральной функции однозначно определяют корреляционную функцию процесса, то условие (11) позволяет различать случайные процессы с отличающимися корреляционными функциями по наблюдаемым выборочным спектральным функциям при достаточно больших значениях параметра T.

Оказывается, что процессы вида $X=\varphi Z$, где φ — неслучайная функция времени, а Z — стационарный гауссовский процесс с непрерывной спектральной функцией, удовлетворяют условию (11). Можно также указать существенно более широкий класс случайных процессов с этим свойством.

Следующий необходимый этап — оценка скорости сходимости (11) с помощью вероятности больших уклонений

$$P(f, \theta, T)=P\{|\hat{F}_x(f, \theta, T)-F_x(f, \theta, T)|>\varepsilon\}.$$

Учитывая, что $P(f, \theta, T)\to 0$ при $T\to\infty$, эта вероятность (или ее оценка) позволяет для любой заданной вероятности $P_0<1$ указать такое время, что для $T\geqslant T_0$ статистики $\hat{F}_x(f, \theta, T)$ отличаются от $F_x(f, \theta, T)$ не более чем на ε с вероятностью, не меньшей чем P_0.

Можно указать одну из возможных оценок вероятности больших уклонений для случая, когда $X=\varphi Z$ — квазигармонизуемый случайный процесс. Если $|\Delta\hat{F}_x(f, \theta, T)|$ — абсолютная величина смещения, оценка которой дается формулой (10), то для $\varepsilon>|\Delta\hat{F}_x(f, \theta, T)|$ имеем

$$P\{|\hat{F}_x(f, \theta, T)-F_x(f, \theta, T)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{8\pi^4\beta_0|f|}{(\varepsilon-|\Delta\hat{F}_x(f, \theta, T)|)^2 T}. \tag{12}$$

Приведенное соотношение позволяет оценивать вероятности уклонений, не меньших чем абсолютная величина смещения $|\Delta\hat{F}_x(f, \theta, T)|$. Однако с ростом T это смещение стремится к нулю, и, следовательно, область применимости оценки (12) расширяется. Если заданы числа ε и δ, для которых должно выполняться неравенство

$$P\{|\hat{F}_x(f, \theta, T)-F_x(f, \theta, T)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\delta,$$

то из условия

$$\frac{1}{T}\,\frac{3}{2}\beta_0+\frac{\ln T}{T^2}\,\frac{\beta_1}{\pi^2}+\frac{1}{T^2}\beta_1\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{2\beta_0}{\beta_1}\right)\leqslant\varepsilon-2\pi^2\beta_0\sqrt{\frac{2l+1}{ST}}$$

можно получить время T, гарантирующее это сообщение.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ю. Аграновский, О. Ю. Боренштейн, О. Л. Соколов, М. Л. Турбович. О погрешностях оценки энергетического спектра нестационарных случайных процессов.— Труды VII Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Т. 2. Таганрог, Изд. ВНИЭП, 1974.

2. О. Л. Соколов, О. Ю. Боренштейн. К определению и оценке энергетических спектров некоторых нестационарных случайных процессов.— «Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика», 1975, т. 18, № 4, с. 558—566.
3. И. А. Ибрагимов. Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса.— «Теория вероятности и ее применение», 1963, т. VIII, № 4, с. 391—429.
4. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962, с. 134, 146, 305—309.
5. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехиздат, 1948, с. 38—43.

Поступила в редакцию 18 декабря 1975 г.;
окончательный вариант — 11 апреля 1976 г.

УДК 518.5

Е. В. ХИЖНЯК, Ю. П. ЧЕРНОВ, М. И. ШТОКМАН
(Новосибирск)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

1. **Введение.** Проблема эффективного расчета электрических полей в проводящей среде, в которой имеются тела различной проводимости, представляет значительный прикладной интерес. Далее для определенности мы будем обсуждать одну из подобных систем — кондуктометрический датчик (КД), хотя вся теория, алгоритмы и программа численного расчета справедливы и в общем случае.

Такой датчик, предложенный в [1], представляет собой непроводящее тело со сквозным каналом, помещенное в электролит, в который погружены также электроды, создающие электрическое поле. При попадании в канал датчика посторонней частицы изменяются ток между электродами и поле в окружающем электролите (отклик датчика). Основная задача, возникающая при описании КД, заключается в нахождении отклика в зависимости от объема, формы и взаимного расположения частицы и канала.

Несмотря на широкое применение КД (см., например, [2]), их теория далека от совершенства. Наиболее последовательный из используемых подходов, предложенный Гровером и другими [3] и, независимо, Рабиновичем [4], основывается на рассмотрении канала датчика с частицей как элементарной ячейки гетерогенной системы. Этому подходу, однако, присущи принципиальные недостатки, основным из которых является введение феноменологического параметра — эффективного объема (длины) канала. Этот параметр не может быть рассчитан и определяется из эксперимента. Кроме того, подход [3, 4] не позволяет вычислить отклик датчика при нахождении частицы в области неоднородного поля, которое существует вследствие конечных размеров канала либо наводится частицей, приблизившейся к стенке канала на расстояние порядка собственных размеров. Другой подход, базирующийся на использовании краевых условий в формуле Грина, был развит в [5], но поскольку там существенно использовалось предположение о наличии в канале однородного поля, полученные оценки могут быть приняты лишь с теми же ограничениями, что и результаты [3, 4].

Наш подход основан на корректном решении уравнений электропроводности при соответствующих граничных условиях, что позволяет аналитически исследовать предельные случаи и провести численные