ЛИТЕРАТУРА

1. F. G. Collins, R. Katchinoski.— "Boxcar" attachment for oscilloscopes useful for low level signals.— "Rev. Sci. Instrum.", 1973, vol. 44, № 9, p. 1178.
2. А. Ф. Чернявский, С. В. Бекетов, А. В. Потапов. Статистические методы анализа случайных сигналов в ядерно-физическом эксперименте. М., Атомиздат, 1974.
3. R. Z. Bachrach. A photon counting apparatus for kinetic and spectral measurements.— "Rev. Sci. Instrum.", 1972, vol. 43, № 5, p. 734.
4. F. T. Arecchi, E. Gatti, A. Sona. Measurement of low light intensities by sinchronous single photon counting.— "Rev. Sci. Instrum.", 1966, vol. 37, № 7, p. 942.
5. M. D. Galanin, Sh. D. Khan-Magometova, Z. A. Chizhikova, M. I. Demchuk, A. F. Chernjavskii. The spectroscopic investigation of the fluorescence decay time of the antracene crystal.— "J. Luminescence", 1975, № 9, p. 459.
6. И. А. Малевич, Ю. А. Постоянов, А. Ф. Чернявский. Методы многоканального анализа флюктуаций периодов фазируемых импульсных систем.— «Автометрия», 1974, № 5, с. 72.
7. Г. Т. Шитиков, Г. Я. Цыганков, О. М. Орлов. Высокостабильные кварцевые генераторы. М., «Сов. радио», 1974.

Поступила в редакцию 31 октября 1975 г.

УДК 519.24

А. А. МАЛИЦКИЙ

(Харьков)

О РАЦИОНАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ИЗМЕРЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ПОЛИНОМИНАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

Постановка задачи. Пусть рассматривается скалярный объект, координата которого s меняется во времени по закону

$$s(t)=\sum_{j=0}^{n} a_j t^j,$$

причем параметры a_j, $j=\overline{1, n}$, неизвестны. С целью их определения в режиме непрерывного наблюдения производятся измерения $s(t)$. Задан временной интервал $[a, b]$, на котором можно производить измерения, и функция $\psi(t)$ такая, что для любого множества $\omega\subset[a, b]$ величина $\int\limits_{\omega}\psi(t)\,dt$ представляет стоимость измерений, проведенных на множестве ω. Общая стоимость всех измерений ограничена известной константой C.

По результатам измерений строится линейная статистическая оценка a_j, точность которой определяется информационной матрицей Фишера $A(\omega)$. Требуется так расположить измерения на отрезке $[a, b]$, чтобы оценки a_j, $j=1, n$, были оптимальны с точки зрения некоторого критерия I, связанного с точностью этих оценок. В качестве такого критерия может быть принят определитель $|A(\omega)|$ информационной матрицы оценок параметров, который в случае нормального распределения оценок обратно пропорционален энтропии этого распределения. Естественно потребовать такого расположения измерений на $[a, b]$, при котором определитель $|A(\omega)|$ максимален.

Как известно [1],

$$A(\omega)=\begin{pmatrix}\int\limits_{\omega}\varphi(t)\,dt & \dots & \int\limits_{\omega}t^n\varphi(t)\,dt\\ \dots & \dots & \dots\\ \int\limits_{\omega}t^n\varphi(t)\,dt & \dots & \int\limits_{\omega}t^{2n}\varphi(t)\,dt\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$$\int\limits_{\omega_0} \psi(t)\,dt = C, \tag{3}$$

где матрица A определена равенством (1), C — заданная константа, интегралы понимаются в смысле Лебега.

Выделим в B подкласс E, на элементах которого выполняется условие (3). В качестве расстояния между множествами естественно выбрать лебегову меру их симметрической разности. Очевидно, интересующий нас функционал непрерывен в такой метрике и, следовательно, $I(\omega)=I(\overline{\omega})$. (Здесь и ниже чертой обозначено замыкание множества.) Поэтому решение, полученное в классе B, является решением в более широком классе открытых, полуоткрытых и замкнутых множеств и наоборот.

Отметим также, что если задачу ставить в классе измеримых множеств, а решение искать в подклассе B конечных систем неперекрывающихся интервалов, то, как легко показать, полученное решение будет ε-оптимальным.

Решение задачи. Образуем матрицу $\widetilde{A}(\omega)$, союзную по отношению к матрице $A(\omega)$, и обозначим через $C_i(\omega)$ сумму тех элементов $\widetilde{a_{kl}}(\omega)$ матрицы $\widetilde{A}(\omega)$, для которых $k+l=i$; k, $l=0, n$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(t, \omega) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \sum_{i=0}^{2n} C_i(\omega)\, t^i.$$

Для произвольной точки $x\in\omega\subset(a, b)$ обозначим через $\omega(x)$ множество, состоящее из тех элементов ω, которые расположены не правее точки x, т. е. $\omega(x) = (a, x) \cap \omega$.

Пусть задано число l из интервала $[0, C]$. Если точка $x\in\omega$ выбирается с таким расчетом, что

$$\int\limits_{\omega(x)} \psi(t)\,dt = l,$$

то эту точку будем обозначать $x(\omega, l)$. Покажем, что с функцией $f(t, \omega)$ связано некоторое характеристическое свойство множества ω_0. Именно, имеет место

Теорема. Для того чтобы множество $\omega_0\in E$ было оптимальным, необходимо, чтобы для почти всех $x\in\omega_0$ и почти всех $y\in[(a, b)/\overline{\omega}_0]$ выполнялось неравенство $f(x, \omega_0)\geqslant f(y, \omega_0)$, и достаточно, чтобы для почти всех $0\leqslant l\leqslant C$ и любых $\omega\in E$ выполнялось неравенство

$$f[x(\omega_0, l), \omega_0(x(\omega_0, l))]\geqslant f[y(\omega, l), \omega(y(\omega, l))],\ y\in\omega\in E.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x\in\omega_0\in E$. Выделим в ω_0 интервал $L=(x-\delta/2, x+\delta/2)$ произвольно малой меры δ. В $(a, b)/\overline{\omega}_0$

возьмем произвольную точку y и интервал $M=(y-\varepsilon/2,\ y+\varepsilon/2)$ меры ε, подобранной так, что $\omega=[(\omega_0/\bar{L}) \cup M] \in E$, т.е.

$$\int_L \psi(t)\,dt = \int_M \psi(t)\,dt. \tag{4}$$

Очевидно, при $\delta \longrightarrow 0$ также и $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Нетрудно прямым счетом показать, что почти всюду

$$|A(\omega_0)| - |A(\omega_0/\bar{L})| = \left.\frac{d|A(\omega_0)|}{dt}\right|_{t=x}\delta + 0(\delta) =$$

$$= \delta\varphi(x)\sum_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,x^i + 0(\delta),$$

т. е. $|A(\omega_0)| = |A(\omega_0/\bar{L})| + \delta\varphi(x)\sum\limits_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,x^i + 0(\delta)$. Здесь $t \in (x-\delta/2,\ x+\delta/2)$. Точно так же почти всюду

$$|A(\omega)| = |A(\omega_0/\bar{L})| + \varepsilon\varphi(y)\sum_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,y^i + 0(\varepsilon).$$

Так как ω_0 — оптимальное множество, то

$$\delta\varphi(x)\sum_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,x^i + 0(\delta) \geqslant \varepsilon\varphi(y)\sum_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,y^i + 0(\varepsilon). \tag{5}$$

Наконец, почти всюду на L и M

$$\int_L \psi(t)\,dt = \delta\psi(x) + 0_1(\delta);$$

$$\int_M \psi(t)\,dt = \varepsilon\psi(y) + 0_1(\varepsilon).$$

В силу (4)

$$\delta\psi(x) + 0_1(\delta) = \varepsilon\psi(y) + 0_1(\varepsilon) > 0.$$

Отсюда из (5) следует

$$\frac{\delta\varphi(x)\sum\limits_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,x^i + 0(\delta)}{\delta\psi(x) + 0_1(\delta)} \geqslant \frac{\varepsilon\varphi(y)\sum\limits_{i=0}^{2n} C_i(\omega)\,y^i + 0(\varepsilon)}{\varepsilon\psi(y) + 0_1(\varepsilon)}$$

или

$$\frac{\varphi(x)\sum\limits_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,x^i + \frac{0(\delta)}{\delta}}{\psi(x) + \frac{0_1(\delta)}{\delta}} \geqslant \frac{\varphi(y)\sum\limits_{i=0}^{2n} C_i(\omega_0)\,y^i + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}}{\psi(y) + \frac{0_1(\varepsilon)}{\varepsilon}}.$$

Переходя к пределу при $\delta \longrightarrow 0$, получаем $f(x,\omega_0) \geqslant f(y,\omega_0)$, что в силу произвольности точек x и y доказывает справедливость первой части теоремы.

Достаточность. Для произвольного множества $\omega \in B$ и произвольной точки $x \in (a, b)$ обозначим $S_\omega(x) = \operatorname{mes}\omega(x)$ — лебегову меру $\omega(x)$.

Разобьем интервал (a, b) на m частей так, чтобы граничные точки множества ω совпадали с некоторыми точками деления. Тогда для произвольной точки деления x_k имеем

$$|A(\omega(x_k+\Delta x_k))|-|A(\omega(x_k))|=\varphi(x)\sum_{i=0}^{2n}C_i(\omega(x_k))x_k^i[S_\omega(x_k+$$
$$+\Delta x_k)-S_\omega(x_k)]+0[S_\omega(x_k+\Delta x_k)-S_\omega(x_k)].$$

Суммируя это равенство по k, а затем устремляя каждое Δx_k к нулю и учитывая, что $|A(\omega(a))|=0$, получаем представление $|A(\omega)|$ в виде стильтьесовского интеграла с интегрирующей функцией $S_\omega(x)$:

$$|A(\omega)|=\int_a^b\varphi(x)\sum_{i=0}^{2n}C_i(\omega(x))x^i dS_\omega(x).$$

Отсюда следует представление $|A(\omega)|$ в виде интеграла Лебега

$$|A(\omega)|=\int_\omega\varphi(x)\sum_{i=0}^{2n}C_i(\omega(x))x^i dx.$$

Пусть теперь задано множество $\omega_0\in E$ такое, что для всех $\omega\in E$ и почти для всех $0\leqslant l\leqslant C$ выполняется неравенство

$$f[\omega_0(x(\omega_0,l)),x(\omega_0,l)]\geqslant f[\omega(y(\omega,l)),y(\omega,l)],\ y\in\omega.$$

Покажем, что $|A(\omega_0)|\geqslant|A(\omega)|$.

Имеем

$$|A(\omega_0)|=\int_{\omega_0}\varphi(x)\sum_{i=0}^{2n}C_i(\omega(x))x^i dx.$$

Произведем замену переменных по формуле

$$l=F(x)=\int_{\omega_0(x)}\psi(t)\,dt,$$

где $F(x)$ — монотонно возрастающая функция и, следовательно, имеющая обратную функцию $x=F^{-1}(l)=x(\omega_0,l)$. Поэтому учитывая, что $\omega_0\in E$, т. е. $\operatorname{mes}\omega_0=C$, получаем

$$|A(\omega_0)|=\int_0^C\frac{\varphi(x(\omega_0,l))}{\psi(x(\omega_0,l))}\sum_{i=0}^{2n}C_i(\omega(x(\omega_0,l)))x^i(\omega_0,l)\,dl=$$
$$=\int_0^C f[\omega_0(x(\omega_0,l)),\ x(\omega_0,l)]\,dl. \tag{6}$$

Точно так же

$$|A(\omega)|=\int_0^C f[\omega(y(\omega,l)),y(\omega,l)]\,dl. \tag{7}$$

По условию почти для всех $0\leqslant l\leqslant C$ значения подынтегральной функции в (6) не меньше соответствующих значений подынтегральной функции в (7), а так как области интегрирования у них совпадают, то $|A(\omega_0)|\geqslant|A(\omega)|$, что и требовалось доказать.

Следствие. В тех граничных точках γ_p множества ω_0, в которых функция $f(t,\omega_0)$ непрерывна, имеют место равенства

$$f(\gamma_1,\omega_0)=f(\gamma_2,\omega_0)=\ldots \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — указанные граничные точки множества ω_0. Тогда ω_0 имеет одну из двух возможных структур: либо $\omega_0 = (a, \gamma_1) \cup (\gamma_2, \gamma_3) \cup \ldots$, либо $\omega_0 = (\gamma_1, \gamma_2) \cup (\gamma_3, \gamma_4) \cup \ldots$

Пусть, например, имеет место первая структура и предположим, что для некоторых двух точек γ_i и γ_j утверждение следствия неверно. Скажем, $f(\gamma_1, \omega_0) > f(\gamma_2, \omega_0)$. При этом в силу непрерывности функции f в точках γ_1 и γ_2 найдутся такие положительные ε и δ, что $f(\gamma_1+\varepsilon, \omega_0) > f(\gamma_2+\delta, \omega_0)$. Но точка $(\gamma_1+\varepsilon) \overline{\in} \omega_0$, а точка $(\gamma_2+\delta) \in \omega_0$, и, следовательно, наше предположение противоречит необходимым условиям. Отсюда $f(\gamma_1, \omega_0) \leqslant f(\gamma_2, \omega_0)$. Точно так же $f(\gamma_2, \omega_0) \leqslant f(\gamma_1, \omega_0)$, т. е. $f(\gamma_1, \omega_0) = f(\gamma_2, \omega_0)$.

Очевидно, проведенные рассуждения верны для любой пары точек и независимо от структуры множества ω_0.

Укажем алгоритм решения задачи:

1. Выписать функцию $f(t, \omega)$.
2. Оценить сверху число корней уравнения $f(t, \omega) = \text{const}$.
3. Определить, например, используя необходимые условия оптимальности, структуру ω_0. Если это сделать не удается, то дальнейшие расчеты проводить для обеих структур.
4. Решить систему

$$\begin{cases} f(\gamma_i, \omega_0) = f(\gamma_j, \omega_0), \\ \int\limits_{\omega_0} \psi(t)\, dt = C. \end{cases}$$

5. Для каждого из решений системы найти $|A(\omega)|$ и выбрать оптимальное множество.

Пример. Пусть $n=1$, $\psi(t) \equiv 1$, $\varphi(t) = \text{const}$, $a=0$, $b=1$. Тогда:

1) $f(t, \omega) = \int\limits_{\omega} \tau^2 d\tau - 2t \int\limits_{\omega} \tau d\tau + t^2 \int\limits_{\omega} d\tau.$

2) Уравнение $f(t, \omega) = \text{const}$ имеет не более двух корней γ_1 и γ_2.

3) Так как ветви параболы направлены вверх, то $\omega_0 = (0, \gamma_1) \cup (\gamma_2, 1)$.

4) Система уравнений для определения γ_1 и γ_2 имеет вид

$$\begin{cases} C\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \left(\int\limits_0^{\gamma_1} \tau d\tau + \int\limits_{\gamma_2}^1 \tau d\tau \right) = C\gamma_2^2 - 2\gamma_2 \left(\int\limits_0^{\gamma_1} \tau d\tau + \int\limits_{\gamma_2}^1 \tau d\tau \right); \\ \gamma_1 + 1 - \gamma_2 = C. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 = C/2$.

5) Так как решение единственное, то оно и определяет оптимальное множество. Именно $\omega_0 = (0, C/2) \cup (1 - C/2, 1)$. Для случая дискретного отбора данных аналогичный результат получен в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Федоров. Теория оптимального эксперимента. М., «Наука», 1965.
2. А. А. Малицкий, А. Д. Мац, Л. Г. Раскин. О выборе моментов измерений в одной задаче оценивания параметров.— «Автометрия», 1972, № 3, с. 36—41.

Поступила в редакцию 14 апреля 1976 г.