АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1977

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 519.24 : 519.217

Н. К. КУЛЬМАН, Н. В. ТИТАРЕНКО
(Москва)

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В СЛУЧАЕ КОСВЕННОГО НАБЛЮДЕНИЯ

В прикладных задачах радиоэлектроники и кибернетики часто возникает необходимость интегрирования случайных функций. Для прямого наблюдения случайной функции в литературе приведены формулы для вычисления корреляционной функции и дисперсии интеграла [1]. При косвенном наблюдении задача h-кратного интегрирования непрерывного марковского процесса была рассмотрена в работе [2] на основе симметризованных стохастических дифференциальных уравнений, где описан метод решения таких задач и приведен алгоритм интегрирования в общем виде.

Как показано в [2], для случая косвенного наблюдения непрерывного марковского процесса задача интегрирования имеет нетривиальный характер: оптимальная оценка интеграла не совпадает с интегралом оценки, представляющим собой псевдооценку. В этой связи представляется важным детальное исследование алгоритма оптимального интегрирования, вычисление дисперсии оптимальной оценки интеграла и сравнение ее с дисперсией псевдооценки. Исследованию этих вопросов и посвящена статья.

Квазилинейный алгоритм оценивания h-кратного интеграла. Пусть наблюдаемый сигнал y_t представляет собой сумму марковского процесса $s(t,\lambda(t))$ и белого шума n_t со спектральной плотностью мощности N_0:

$$y_t = s(t, \lambda(t)) + n_t, \tag{1}$$

где $s(t,\lambda)$ — функция известного вида; $n_t = (N_0/2)^{1/2}\eta_t$; η_t — стандартный белый гауссов шум (СБГШ): $\overline{\eta_t}=0$, $\overline{\eta_t\eta_{t+\tau}}=\delta(\tau)$. Здесь λ_t является непрерывным марковским процессом и определяется на основе стохастического уравнения

$$\dot{\lambda} = a(\lambda) + \sqrt{b}\,\xi_t \tag{2}$$

($a(\lambda)$ — функция известного вида, b — константа, ξ_t — СБГШ).

Требуется оценить h-кратный интеграл

$$\mu_h = \int_0^t d\tau_h \int_0^{\tau_h} d\tau_{h-1} \ldots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \lambda(\tau_1) = I^h\lambda \tag{3}$$

(I^h — оператор h-кратного интегрирования), а также найти дисперсию оптимальной оценки $\mu_h^*(t) = M\left[\mu_h(t) \mid y_0^t\right]$ и сравнить ее с дисперсией псевдооценки

$$\widetilde{\mu}_h^* = \int_0^t d\tau_h \int_0^{\tau_h} d\tau_{h-1} \ldots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \lambda^*(\tau_1) = I^h \lambda^*. \tag{4}$$

Здесь $\lambda^*(t) = M\left[\lambda(t) \mid y_0^t\right]$. Оценки μ_h^* и λ^* оптимальные в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки.

Введем в рассмотрение $(h+1)$-мерный марковский процесс $\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\lambda_i(t),\ i=\overline{1,\ h+1}\}$, причем

$$\lambda_1 = \lambda;\ \ \lambda_2 = \int_0^t \lambda_1 d\tau,\ \ldots,\ \lambda_{h+1} = \mu_h = \int_0^t \lambda_h d\tau. \tag{5}$$

На основе выражений (2), (5) получим

$$\dot{\lambda}_1 = a(\lambda_1) + \sqrt{b}\,\xi_t;\ \ \dot{\lambda}_2 = \lambda_1,\ \ldots,\ \dot{\lambda}_{h+1} = \lambda_h. \tag{6}$$

Алгоритм квазилинейной фильтрации процесса $\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_{h+1}(t)\}$ записывается в виде [2]

$$\dot{\lambda}_1^* = a(\lambda_1^*) + k_{11} F'(\lambda_1^*); \tag{7}$$

$$\dot{\lambda}_i^* = \lambda_{i-1}^* + k_{i1} F'(\lambda_1^*); \tag{8}$$

$$\dot{k}_{11} = 2a'(\lambda_1^*) k_{11} + k_{11}^2 F''(\lambda_1^*) + b; \tag{9}$$

$$\dot{k}_{i1} = k_{i1} a'(\lambda_1^*) + k_{i-1,1} + k_{11} k_{i1} F''(\lambda_1^*); \tag{10}$$

$$\dot{k}_{ij} = k_{i-1,j} + k_{i,j-1} + k_{i1} k_{j1} F''(\lambda_1^*), \tag{11}$$

где $i,\ j = \overline{2,\ h+1}$; $F'(\lambda_1^*) = (2/N_0)\left[y_t - s(t, \lambda_1^*)\right] s'(t, \lambda_1^*)$; $F''(\lambda_1^*) = -2\left[s'(t, \lambda_1^*)\right]^2 / N_0$.

Система уравнений (7)—(11) дает решение задачи h-кратного интегрирования. Компонента $\lambda_{h+1}^* = \mu_h^*$ представляет собой оптимальную оценку h-кратного интеграла, причем дисперсия этой оценки совпадает с $k_{h+1,\ h+1}$. Начальные условия в (7)—(11) имеют вид

$$\lambda_1^*(0) = M\lambda;\ \ k_{11}(0) = D\lambda;\ \ \lambda_i^*(0) = k_{ij}(0) = 0;\ \ i, j = \overline{2,\ h+1}. \tag{12}$$

Из (4), (8) имеем

$$\mu_h^* = \widetilde{\mu}_h^* + \sum_{i=1}^{h} I^i k_{h+2-i,1} F'(\lambda_1^*). \tag{13}$$

Данное соотношение иллюстрирует различие оценки (μ_h^*) и псевдооценки $(\widetilde{\mu}_h^*)$ h-кратного интеграла.

Вычисление кумулянтов k_{i1}, необходимых для формирования оценки интеграла. Представим уравнение (10) в виде

$$\dot{k}_{i1} = k_{i1} f + k_{i-1,1}\ (f = a' - k_{11} K). \tag{14}$$

Отсюда с учетом (12) находим

$$k_{i1} = \exp\left\{\int_0^t f d\tau\right\} \int_0^t k_{i-1,1}(\tau) \exp\left\{-\int_0^\tau f dx\right\} d\tau \tag{15}$$

или

$$k_{i1} = \exp\left\{\int_0^t f d\tau\right\} I^{i-1} \exp\left\{-\int_0^{\tau_1} f dx\right\} k_{11}(\tau), \tag{16}$$

где k_{11} — дисперсия оценки λ_t^*.

Если F'' и $a'(a'<0)$ не зависят от параметра λ_1 и времени, то (9)

Если F'' и $a'(a'<0)$ не зависят от параметра λ_1 и времени, то (9)

$$k_{11} = \frac{|a'|}{K}\left(\left(1 + K\frac{b}{(a')^2}\right)^{1/2} - 1\right) \tag{17}$$

и асимптотически стационарное (при $Kb/(a')^2 \gg 1$ или $N_0 \to 0$)

$$k_{11} \simeq (b/K)^{1/2}. \tag{18}$$

Тогда с учетом обозначения $a' - \tilde{k}_{11}K = \tilde{f} < 0$ из (16) получим

$$k_{i1} = e^{\tilde{f}t} I^{i-1} \tilde{k}_{11} e^{-\tilde{f}\tau} = (-1)^{i-1} \frac{\tilde{k}_{11}}{\tilde{f}^{\,i-1}} - k_{11} e^{\tilde{f}t} \sum_{j=0}^{i-2} \frac{t^j (-1)^{i-1-j}}{j!\, \tilde{f}^{\,i-1-j}}, \tag{19}$$

причем k_{i1} стремится к стационарному значению

$$\tilde{k}_{i1} = (-1)^{i-1} \tilde{k}_{11} / \tilde{f}^{\,i-1}. \tag{20}$$

Время установления стационарного значения $\tilde{k}_{i1}$

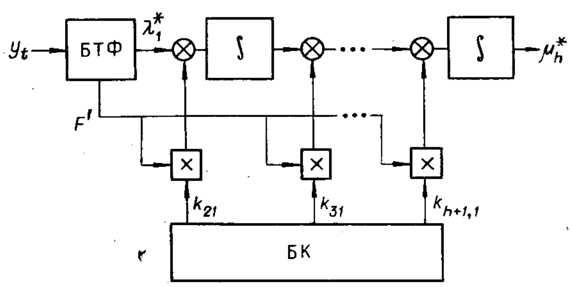
$$\tau_{\text{уст}\, i} = \frac{\int_0^\infty (k_{i1}(t) - \tilde{k}_{i1})\, t dt}{\int_0^\infty (k_{i1}(t) - \tilde{k}_{i1})\, dt}. \tag{21}$$

Отсюда с учетом (19), (20) получим

$$\tau_{\text{уст}\, i} = i/2|\tilde{f}|. \tag{22}$$

Величина $1/|\tilde{f}|$ определяет и время установления ($\tau_{\text{уст}1}$) значения k_{11}. Следовательно, в случае стационарной фильтрации процесса λ_t алгоритм h-кратного интегрирования также будет стационарным. Отметим, что при $Kb/(a')^2 \gg 1$ ($N_0 \to 0$) стационарный режим устанавливается практически мгновенно, так как $\tau_{\text{уст}\, i} \sim \tau_{\text{уст}\, 1} \sim (Kb)^{-1/2}$ [2], причем $\tau_{\text{уст}\, i} \ll \tau_\lambda \sim (a')^{-1}$ (τ_λ — время корреляции процесса $\lambda(t)$).

Устройство h-кратного интегрирования марковского процесса λ_t состоит из блока текущей фильтрации (БТФ), блока кумулянтов (БК) и цепочки интеграторов (рисунок). Блок текущей фильтрации определяется уравнениями (7), (9), а в стационарном случае—уравнениями (8), (17) либо (18). В этом случае h перемножителей могут быть заменены на h усилителей с постоянными коэффициентами передачи, равными $\tilde{k}_{i1}$ (20).



Блок-схема h-кратного интегратора.

Вычисление дисперсии оценки h-кратного интегра-

ла. **Сравнение с дисперсией псевдооценки.** Используя (11), нетрудно получить выражение для дисперсии оценки h-кратного интеграла $k_{h+1,h+1}$ через кумулянты k_{i1}, $i=\overline{2,\ h+1}$. Опуская выкладки, приведем конечный результат:

$$k_{h+1,h+1} = 2I^h \sum_{i=0}^{h-1} C_{h-1+i}^{i} I^i k_{h+1-i,1} - I^h \sum_{i=1}^{h-1} I^i \sum_{j=i}^{h-1} C_{h-1+i}^{j} k_{2-i+j,1} \times$$
$$\times k_{h+1-j,1} K - \sum_{i=1}^{h} I^i \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^{j} k_{h+1-j,1} k_{h+2-i+j,1} K, \tag{23}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент.

Вычислим дисперсию оценки h-кратного интеграла $\widetilde{k}_{h+1,\,h+1}(t)$ в стационарном случае $k_{i1}=\widetilde{k}_{i1}$ ($\widetilde{k}_{i1}=\mathrm{invar}(t)$). Подставляя в (23) значения кумулянтов $\widetilde{k}_{i1}$, находим

$$k_{h+1,h+1}(t) = 2\sum_{i=0}^{h-1} C_{h+i-1}^{i} \frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|^{h-i}} \frac{t^{h+i}}{(h+i)!} - \sum_{i=1}^{h-1} \frac{\widetilde{k}_{11}^{2} K}{|\widetilde{f}|^{h+1-i}} \sum_{j=i}^{h-1} C_{h-1+i}^{j} -$$
$$- \sum_{i=1}^{h} \frac{\widetilde{k}_{11}^{2} K}{|\widetilde{f}|^{2h+1-i}} \frac{2^{i-1} t^i}{i!}. \tag{24}$$

Старший член (с наибольшей скоростью роста) имеет вид

$$2C_{2(h-1)}^{(h-1)} \frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|} \frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!} - C_{2(h-1)}^{(h-1)} \frac{\widetilde{k}_{11}^{2} K}{|\widetilde{f}|^2} \frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!}. \tag{25}$$

В случаях однократного ($h=1$) и двукратного ($h=2$) интегрирования соответственно имеем:

$$\widetilde{k}_{22}(t) = \left(2\frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|} - \frac{\widetilde{k}_{11}^{2} K}{|\widetilde{f}|^2}\right) t; \tag{24'}$$

$$\widetilde{k}_{33}(t) = 2\left(C_1^0 \frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|^2} \frac{t^2}{2!} + C_2^1 \frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|} \frac{t^3}{3!}\right) - C_2^1 \frac{\widetilde{k}_{11}^{2} K}{|\widetilde{f}|^2} \frac{t^3}{3!} -$$
$$- \left(C_1^0 \frac{\widetilde{k}_{11}^{2}}{|\widetilde{f}|^3} + C_1^1 \frac{\widetilde{k}_{11}^{2}}{|\widetilde{f}|^3}\right) \frac{Kt^2}{2!} + C_0^0 \frac{\widetilde{k}_{11}^{2} K}{|\widetilde{f}|^4} t. \tag{24''}$$

Сравним дисперсии оценки и псевдооценки. Из выражений (2), (7) находим уравнение для ошибки фильтрации $\varepsilon_\lambda = \lambda^* - \lambda$ в предположении ее малости ($D\varepsilon_\lambda \ll |a'/a^{(j+1)}|^{2/j}$, $j \geqslant 1$) в виде

$$\dot{\varepsilon}_\lambda = \widetilde{f}\varepsilon_\lambda + (2\widetilde{k}_{11}\widetilde{f})^{1/2}\zeta_t, \tag{26}$$

где ζ_t — СБГШ. Следовательно, ε_λ представляет собой гауссов марковский процесс с дисперсией $D\varepsilon_\lambda = \widetilde{k}_{11}$ и временем корреляции $\tau_\varepsilon = |\widetilde{f}|^{-1}$.

Введем многомерный процесс $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_i,\ i=\overline{1,\ h+1}\}$, где $\varepsilon_i = I^{i-1}\varepsilon$. Стохастические уравнения для компонент вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = \widetilde{f}\varepsilon_1 + (2\widetilde{k}_{11}\widetilde{f})^{1/2}\zeta_t;$$
$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i-1},\ i=\overline{2,\ h+1}. \tag{27}$$

Матрица дисперсий $D=\|d_{ij}\|$ ($i,\ j=\overline{1,\ h+1}$) векторного процесса ε определяется системой уравнений [2, 3]:

$$\dot{d}_{ij} = \sum_{l=1}^{h+1} (f_{il} d_{jl} + f_{jl} d_{il}) + b_{ij}, \tag{28}$$

где $f_{11}=\widetilde{f}$; $b_{11}=2\widetilde{k}_{11}\widetilde{f}$; $f_{ij}=\delta_{i,j-1}$; $b_{ij}=0$, $i,j=\overline{2,h+1}$. Нетрудно убедиться, что система (28) совпадает с уравнениями (9)—(11) с учетом замен

$$k_{ij}\to d_{ij};\quad a'\to\widetilde{f};\quad F''\to 0\quad (K\to 0). \tag{29}$$

Поэтому приведенное выше решение системы (9)—(11) справедливо и для системы (28) с учетом (29).

Используя формулу (24), в стационарном случае ($k_{11}=\widetilde{k}_{11}$) аналогично получим

$$\widetilde{d}_{h+1,h+1}=2\sum_{j=0}^{h-1}C_{h+j-1}^{j}\frac{d_{11}}{|\widetilde{f}|^{h-j}}\,\frac{t^{h+j}}{(h+j)!}. \tag{30}$$

Здесь $\widetilde{d}_{h+1,\,h+1}$ — дисперсия псевдооценки h-кратного интеграла в режиме стационарной фильтрации.

Сравнивая (24) и (30), находим

$$\widetilde{d}_{h+1,h+1}-k_{h+1,h+1}=\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=i}^{h-1}C_{h-1+i}^{j}\frac{\widetilde{k}_{11}^{2}K}{|\widetilde{f}|^{h+1-i}}\,\frac{t^{h+i}}{(h+i)!}+$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^{j}\frac{\widetilde{k}_{11}^{2}K}{|\widetilde{f}|^{2h-i+1}}\,\frac{t^{i}}{i!}. \tag{31}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{d}_{h+1,\,h+1}-\widetilde{k}_{h+1,\,h+1}>0$, причем разность возрастает со временем. Если рассматривать только члены с наибольшей скоростью роста (что справедливо для больших t), то нетрудно получить оценку

$$\frac{\widetilde{d}_{h+1,h+1}-\widetilde{k}_{h+1,h+1}}{\widetilde{d}_{h+1,h+1}}=\frac{1}{2}\,\frac{\widetilde{k}_{11}K}{|\widetilde{f}|}. \tag{32}$$

Пример. h-кратное интегрирование гауссова процесса. Предположим, что λ_t — гауссов марковский процесс, характеризуемый линейным коэффициентом сноса

$$a(\lambda)=-\alpha\lambda;\quad a'=-\alpha, \tag{33}$$

и пусть $[s'(t,\lambda^*)]^2=(s')^2$ не зависит от t и λ.

Из (17) следует, что

$$k_{11}=\frac{\alpha N_0}{2(s')^2}\left(\left(1+\frac{2b(s')^2}{N_0\alpha^2}\right)^{1/2}-1\right). \tag{34}$$

Введем обобщенное отношение сигнал/шум:

$$q_0=\frac{\sigma_\lambda^2(s')^2}{N_0\alpha}, \tag{35}$$

где $\sigma_\lambda^2=b/2\alpha$ — априорная дисперсия процесса λ_t. Тогда кумулянт $\widetilde{k}_{11}$ можно представить в виде

$$\widetilde{k}_{11}=\frac{\sigma_\lambda^2}{q_0}\left((1+4q_0)^{1/2}-1\right), \tag{36}$$

и, учитывая (20), находим

$$\widetilde{k}_{i1}=\frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|^{i-1}}=\frac{\sigma_\lambda^2((1+4q_0)^{1/2}-1)}{q_0\alpha^{i-1}(2(1+4q_0)^{1/2}-1)^{i-1}}.$$

В случае $\sqrt{q_0}\gg 1/2\,(N_0\to 0)$ имеем

$$\widetilde{k}_{i1}\simeq\frac{\sigma_\lambda^2}{\alpha^{i-1}}\,\frac{1}{q_0^{i/2}2^{2i-3}}. \tag{37}$$

Главный член дисперсии ошибки для h-кратного интегрирования (при $\sqrt{q_0} \gg 1/2$) определяется на основе (25) в виде

$$\widetilde{k}_{h+1,h+1} \simeq 2C_{2(h-1)}^{(h-1)} \frac{\widetilde{k}_{11}}{|\widetilde{f}|} \frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!} - C_{2(h-1)}^{(h-1)} \frac{\widetilde{k}_{11}^2 K}{|\widetilde{f}|^2} \frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!}. \qquad (38)$$

С учетом выражения (35) и соотношения $\widetilde{f} = -\alpha - \widetilde{k}_{11} K$ находим

$$\widetilde{k}_{h+1,h+1} = C_{2(h-1)}^{(h-1)} \frac{\sigma_\lambda^2}{q_0 \alpha} \frac{(1+4q_0)^{1/2} - 1}{2(1+4q_0)^{1/2} - 1} \frac{t^{2h-1}}{(2h-1)!}. \qquad (38)$$

Используя (32), получим аналогичное выражение для дисперсии псевдооценки (31). В силу (32) (при $q_0 \gg 1$) имеем

$$\widetilde{k}_{h+1,\,h+1} / \widetilde{d}_{h+1,\,h+1} = 1/2.$$

Таким образом, оптимальный алгоритм интегрирования дает в два раза меньшую дисперсию ошибки по сравнению с неоптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. I. М., «Сов. радио», 1974.
2. В. И. Тихонов, Н. К. Кульман. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., «Сов. радио», 1975.
3. Г. Ван-Трис. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. I. М., «Сов. радио», 1972.

Поступила в редакцию 27 января 1976 г.

УДК 62-50 : 519.92

Н. С. ДЕМИН

(Томск)

ОПТИМАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задачи оптимального оценивания состояний динамических систем [1], синтеза фильтрующих и сглаживающих информационно-измерительных систем [2], передачи сообщений [3] и некоторые другие часто сводятся к следующей схеме: по измерениям на интервале $[t_0, \xi]$ случайного процесса $z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \xi$, который будем обозначать z_0^ξ, найти оценки случайного процесса $x(t)$ в каждой точке $t = \tau$, $\tau \geqslant t_0$. При этом в зависимости от соотношений между моментом оценивания τ и моментом окончания наблюдений ξ процедуры оценивания бывают трех типов: 1) $\tau = \xi$ — фильтрация; 2) $\tau > \xi$ — предсказание (или экстраполяция); 3) $\tau < \xi$ — сглаживание (или интерполяция). В свою очередь, процедуры сглаживания подразделяются также на три типа: а) сглаживание в фиксированной точке (или прямая интерполяция) [1, 4, 5]; б) сглаживание на фиксированном интервале (или обратная интерполяция) [1, 4, 6, 7]; в) сглаживание с постоянным запаздыванием [1].