13. R. S. Bucy, P. D. Joseph. Filtering for stochastic processes with application to guidance. New York, Interscience Publishers, 1968.
14. Н. С. Демин. О прямых уравнениях интерполяции для векторов состояний динамических систем.— Третье Всесоюзное совещание по статистическим методам в процессах управления. (Тезисы докладов). Ч. 1. Вильнюс, Изд. АН Лит.ССР, 1973, с. 65—67.
15. Н. С. Демин. О прямых уравнениях интерполяции для диффузионных процессов.— Труды Сибирского физико-технического института им. В. Д. Кузнецова. Ч. 2. Томск. Изд. Томского университета, вып. 60, с. 21—30.

Поступила в редакцию 4 ноября 1975 г.; окончательный вариант — 4 марта 1976 г.

УДК 519.25 : 621.3.087

Е. Д. КОНСОН

(Ленинград)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ВЫСОКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВАРИАЦИИ

В работах [1—3] рассматривался знаковый метод определения математического ожидания стационарного случайного процесса. Существенная особенность метода — введение вспомогательного случайного процесса в процедуру обработки исследуемого процесса. При построении устройств, основанных на этом принципе, характеристики источника вспомогательного сигнала фактически определяют точностные свойства всего устройства [1], причем источник вспомогательного сигнала является и наиболее сложной в техническом отношении частью устройства [4].

В настоящей работе показано, что при введении дополнительных ограничений на характеристики исследуемого процесса знаковый алгоритм может быть представлен в форме, не требующей использования вспомогательного процесса.

Предлагаемый алгоритм содержит следующие операции. На основе последовательных независимых выборок $x_i (i=1, 2, \ldots)$ анализируемого процесса $x(t)$, математическое ожидание которого δ, дисперсия σ^2 и плотность распределения $\varphi(x)$, определяются значения функции $f_1(x_i) = \operatorname{sgn} x_i$ и $f_2(x_i) = 0{,}5[\operatorname{sgn}(x_i+u) - \operatorname{sgn}(x_i-u)]$, где u — задаваемый параметр алгоритма. Полученные значения используются для формирования текущих сумм $\sum\limits_i f_1(x_i)$ и $\sum\limits_i f_2(x_i)$. Очевидно, что в процессе обработки вторая сумма может только возрастать. Когда она становится равной заранее заданному числу k, являющемуся параметром алгоритма, фиксируется значение первой суммы, которое и рассматривается в качестве оценки искомого математического ожидания δ (с точностью до известного множителя). Таким образом, число используемых в оценке выборок случайно. Перейдем к анализу вероятностных характеристик алгоритма и их зависимости от параметров u и k.

Событие, заключающееся в том, что оценка будет содержать N выборок, состоит из событий, когда в результате обработки $N-1$ первых выборок сумма $\sum\limits_{i=1}^{N-1} f_2(x_i)$ принимает значение $k-1$ и N-я выборка x_N попадает в промежуток $[-u, u]$. При независимых выборках распределение $\sum\limits_{i=1}^{N-1} f_2(x_i)$ подчиняется биномиальному закону, и для распределения вероятностей числа выборок, используемых в оценке, можно записать следующее соотношение:

$$P\{N\} = P\{f_2(x_N) = 1\} P\left\{\sum_{i=1}^{N-1} f_2(x_i) = k-1\right\} = p_2 C_{N-1}^{k-1} p_2^{k-1} (1-p_2)^{N-k} =$$

$$= \frac{(N-1)!}{(k-1)!\,(N-k)!} p_2^k (1-p_2)^{N-k}, \tag{1}$$

где C_{N-1}^{k-1} — число сочетаний из $N-1$ элементов по $k-1$; $p_2 = \int\limits_{-u}^{u} \varphi(x)\,dx$.

Определим математическое ожидание и дисперсию числа выборок

$$M\{N\} = \sum_{N=k}^{\infty} NP\{N\} = \sum_{N=k}^{\infty} \frac{N!}{(k-1)!\,(N-k)!} p_2^k (1-p_2)^{N-k} =$$

$$= p_2^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(k-1)!\,j!} (1-p_2)^j = k p_2^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!\,k!} (1-p_2)^j. \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, разлагая в ряд Тейлора вблизи единицы функцию p_2^{-k-s}, что справедливо следующее соотношение:

$$p_2^{-k-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k+s-1)!}{(k+s-1)!\,j!} (1-p_2)^j. \tag{3}$$

Используя последнюю формулу при $s=1$, сумму в выражении (2) можно свернуть. Тогда для $M\{N\}$ получаем

$$M\{N\} = k/p_2. \tag{4}$$

Для вычисления дисперсии N представим $D\{N\}$ как разность: $D\{N\} = M\{N^2\} - M^2\{N\}$. Первый член этой разности имеет вид

$$M\{N^2\} = \sum_{N=k}^{\infty} N^2 P\{N\} = \sum_{N=k}^{\infty} N^2 p_2^k \frac{(N-1)!}{(k-1)!\,(N-k)!} (1-p_2)^{N-k} =$$

$$= p_2^k \left[k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(k-1)!\,j!} (1-p_2)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(k-1)!\,(j-1)!} (1-p_2)^j \right] =$$

$$= p_2^k \left[k \frac{k}{p_2^{k+1}} + (1-p_2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k+1)!}{(k-1)!\,j!} (1-p_2)^j \right] =$$

$$= p_2^k \left[k \frac{k}{p_2^{k+1}} + (1-p_2)\, k\,(k+1) \frac{1}{p_2^{k+2}} \right] = \frac{k^2}{p_2^2} + k \frac{(1-p_2)}{p_2^2}; \tag{5}$$

здесь свертывание сумм произведено на основании формулы (3). Окончательно для дисперсии числа выборок получаем выражение

$$D\{N\} = k \frac{(1-p_2)}{p_2^2}. \tag{6}$$

Из (4), (6) следует, что коэффициент вариации случайной величины N есть $\sqrt{1-p_2}/\sqrt{k}$. Это указывает на малые относительные флюктуации числа выборок при больших значениях параметра k.

Перейдем к анализу значений суммы $\sum\limits_{i=1}^{N} f_1(x_i)$, накапливаемых к моменту достижения суммой $\sum_{i=1}^{N} f_2(x_i)$ значения k. Определим математическое ожидание $\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)$. Для этого представим его как $\underset{N}{M}\left\{\underset{x_1,\ldots,x_N}{M}\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\,|\,N\right\}\right\}$ и вычислим сначала внутреннее условное математическое ожидание. При его вычислении необходимо брать условные распределения $\varphi(x_i|N)$. Переход от безусловных плотностей к условным можно провести, пользуясь следующими обстоятельствами. Условие $\sum_{i=1}^{N-1} f_2(x_i) = k-1$ означает, что $k-1$ выборка процесса $x(t)$ из общего числа $N-1$ попадает в промежуток $[-u, u]$. При этом может существовать C_{N-1}^{k-1} различных равновероятных реализаций последовательности $f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_{N-1})$, удовлетворяющих этому условию. Очевидно, что среди этих реализаций всегда будет C_{N-2}^{k-2} таких, в которых выборка с любым заданным номером $j(1 \leqslant j \leqslant N-1)$ попадает в промежуток $[-u, u]$, и C_{N-2}^{k-1} реализаций, когда эта выборка не попадает в такой промежуток. Следовательно, переход к условным плотностям сводится к нормированию в промежутках:

$$\varphi(x_j|N) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_2}\dfrac{C_{N-2}^{k-2}}{C_{N-1}^{k-1}}\varphi(x_j) \text{ при } |x_j| \leqslant u; \\ \dfrac{1}{1-p_2}\dfrac{C_{N-2}^{k-1}}{C_{N-1}^{k-1}}\varphi(x_j) \text{ при } |x_j| > u, \end{cases} \tag{7}$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Нетрудно также видеть, что из условия $f_2(x_N) = 1$ следует при $|x_N| \leqslant u$

$$\varphi(x_N|N) = (1/p_2)\varphi(x_N). \tag{8}$$

С учетом (7), (8) соотношение для условного математического ожидания можно записать так:

$$\underset{x_1,\ldots,x_N}{M}\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\,|\,N\right\} = \sum_{i=1}^{N-1}\underset{x_i}{M}\{f_1(x_i)\,|\,N\} + \underset{x_N}{M}\{f_1(x_N)\,|\,N\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N-1}\left[1 - 2\int_{-\infty}^{0}\varphi(x_i|N)\,dx_i\right] + 1 - 2\int_{-\infty}^{0}\varphi(x_N|N)\,dx_N =$$
$$= N - 2\left[(N-k)\frac{p_1-p_3}{1-p_2} + (k-1)\frac{p_3}{p_2}\right] - 2\frac{p_3}{p_2}. \tag{9}$$

В последнем введены обозначения:

$$p_1 = \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx; \quad p_3 = \int_{-u}^{0}\varphi(x)\,dx. \tag{10}$$

Усредняя далее по N, имеем

$$M\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} = \sum_{N=k}^{\infty} P\{N\}\underset{x_1,\ldots,x_N}{M}\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\,|\,N\right\} =$$
$$= -2(k-1)\frac{p_3}{p_2} - 2\frac{p_3}{p_2} + 2k\frac{p_1-p_3}{1-p_2} + \left(1 - 2\frac{p_1-p_3}{1-p_2}\right)\times$$
$$\times \sum_{N=k}^{\infty} NP\{N\} = k\frac{1-2p_1}{p_2}. \tag{11}$$

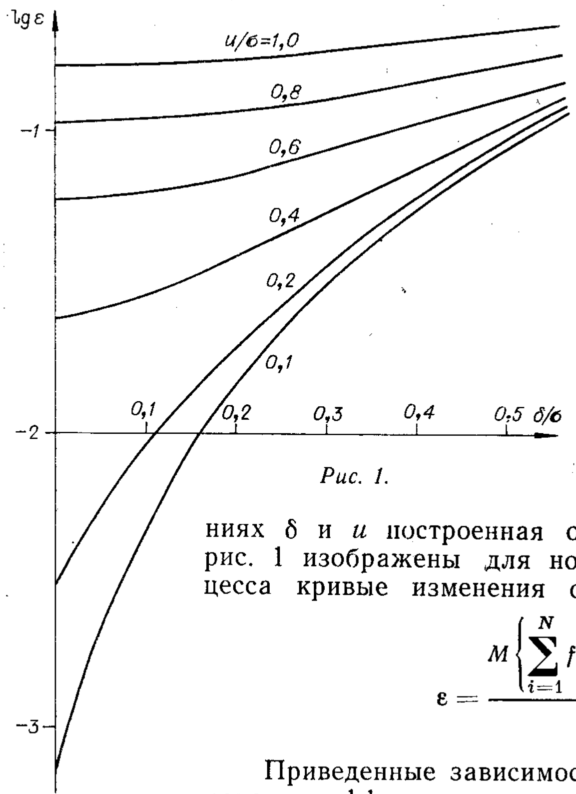

Рис. 1.

Если математическое ожидание процесса $x(t)$ совпадает с его медианой $\left(\int\limits_{-\infty}^{\delta} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\right)$, то при δ и u, стремящихся к нулю, раскрывая обозначения p_1, p_2 и используя интегральную теорему о среднем значении, нетрудно получить из (11) следующее асимптотическое равенство:

$$M\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} = k\,\frac{\delta}{u}. \tag{12}$$

При конечных значениях δ и u построенная оценка имеет смещение. На рис. 1 изображены для нормального случайного процесса кривые изменения относительного смещения ε:

$$\varepsilon = \frac{M\left\{\sum\limits_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} - k\,\frac{\delta}{u}}{k\,\frac{\delta}{u}}. \tag{13}$$

Приведенные зависимости показывают, что при высоком коэффициенте вариации анализируемого процесса ($\sigma/\delta \geqslant 10$), выбирая соответствующим образом величину параметра u, можно достичь пренебрежимо малого смещения.

Перейдем к определению дисперсии построенной оценки. Для этого запишем дисперсию как разность вида

$$D\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} = M\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right]^2\right\} - M^2\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} =$$
$$= \underset{N}{M}\left\{\underset{x_1,\ldots,x_N}{M}\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right]^2 \middle| N\right\}\right\} - M^2\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\}. \tag{14}$$

Раскроем первый член этой разности, выполняя сначала внутреннее усреднение по $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а затем внешнее по N:

$$\underset{x_1,\ldots,x_N}{M}\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right]^2 \middle| N\right\} = N + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N-1} \underset{x_i,x_j}{M}\{f_1(x_i)\,f_1(x_j)\,|\,N\} +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{N-1} \underset{x_i,x_N}{M}\{f_1(x_i)\,f_1(x_N)\,|\,N\}. \tag{15}$$

Здесь учтено, что квадрат $f_1(x_i)$ всегда равен единице, и соответственно $\sum\limits_{i=1}^{N} \underset{x_i}{M}\{f_1^2(x_i)\,|\,N\} = N$. Вычисление же смешанных моментов требует знания совместных условных законов распределения. Их отыскание проведем аналогично (7), анализируя состав последовательности $f_2(x_1), \ldots, f_2(x_{N-1})$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_{i=1}^{N-1} f_2(x_i) = k-1$.

При любых номерах i и j ($i \neq j$; $1 \leqslant i$; $j \leqslant N-1$) C_{N-1}^{k-1} реализаций этой последовательности можно разделить на четыре группы. В первой группе из C_{N-3}^{k-3} реализаций выполняются условия $f_2(x_i) = 1$ и

$f_2(x_j)=1$, и, следовательно, x_i и x_j попадают в промежуток $[-u, u]$. Во второй группе из C_{N-3}^{k-2} реализаций выполняются условия $f_2(x_i)=1$ и $f_2(x_j)=0$, т. е. x_i попадает в указанный промежуток, а x_j не попадает. Третья группа состоит тоже из C_{N-3}^{k-2} реализаций, но ограничения на x_i и x_j меняются местами по отношению ко второй группе ($f_2(x_i)=0$; $f_2(x_j)=1$). И, наконец, четвертая группа содержит C_{N-3}^{k-1} реализаций, в которых $f_2(x_i)=0$ и $f_2(x_j)=0$. Данные группы исчерпывают весь набор возможных реализаций, так как $C_{N-3}^{k-3}+2C_{N-3}^{k-2}+C_{N-3}^{k-1}=C_{N-1}^{k-1}$. Отсюда следует, что вероятности P_1, P_2, P_3, P_4 появления реализаций той или иной группы при выполнении $\sum_{i=1}^{N-1} f_2(x_i)=k-1$ имеют следующие значения:

$$P_1=\frac{C_{N-3}^{k-3}}{C_{N-1}^{k-1}}=\frac{(k-1)(k-2)}{(N-1)(N-2)};$$

$$P_2=P_3=\frac{C_{N-3}^{k-2}}{C_{N-1}^{k-1}}=\frac{(k-1)(N-k)}{(N-1)(N-2)}; \tag{16}$$

$$P_4=\frac{C_{N-3}^{k-1}}{C_{N-1}^{k-1}}=\frac{(N-k)(N-k-1)}{(N-1)(N-2)}.$$

На рис. 2 показано разбиение плоскости x_ix_j на области Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, к которым относятся реализации соответствующих групп.

Учитывая изложенное, получаем выражение для распределений по областям

$$\varphi(x_i, x_j\,|\,N)\Big|_{x_i, x_j\in Q_s}=\frac{P_s}{P\{x_i, x_j\in Q_s\}}\,\varphi(x_i)\varphi(x_j) \tag{17}$$

$$s=1, 2, 3, 4;\quad i, j=1, 2, \ldots, N-1;\quad i\neq j.$$

Раскрывая обозначения, имеем

$$\varphi(x_i, x_j\,|\,N)=\begin{cases}\dfrac{(k-1)(k-2)}{(N-1)(N-2)}\,\dfrac{\varphi(x_i)\,\varphi(x_j)}{p_2^2} & \text{при } x_i, x_j\in Q_1;\\[2ex] \dfrac{(k-1)(N-k)}{(N-1)(N-2)}\,\dfrac{\varphi(x_i)\,\varphi(x_j)}{p_2(1-p_2)} & \text{при } x_i, x_j\in Q_2\cup Q_3;\\[2ex] \dfrac{(N-k)(N-k-1)}{(N-1)(N-2)}\,\dfrac{\varphi(x_i)\,\varphi(x_j)}{(1-p_2)^2} & \text{при } x_i, x_j\in Q_4.\end{cases} \tag{18}$$

Действуя аналогично, можно получить совместные условные распределения для пар x_i, x_N:

$$\varphi(x_i, x_N\,|\,N)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{N-1}\,\dfrac{\varphi(x_i)\,\varphi(x_N)}{p_2^2} & \text{при } |x_i|\leqslant u;\\[2ex] \dfrac{N-k}{N-1}\,\dfrac{\varphi(x_i)\,\varphi(x_N)}{p_2(1-p_2)} & \text{при } |x_i|>u;\end{cases} \tag{19}$$

$$i=1, 2, \ldots, N-1.$$

На основании распределений (18), (19) вычислим суммы условных смешанных моментов:

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} \underset{x_i,x_j}{M}\{f_1(x_i)\,f_1(x_j)\,|\,N\} = 2\left[(k-1)(k-2)\frac{(p_2-p_3)^2+p_3^2}{p_2^2} + \right.$$

$$+\,2(k-1)(N-k)\frac{(1-p_1-p_2+p_3)(p_2-p_3)+p_3(p_1-p_3)}{p_2(1-p_2)} +$$

$$\left. +\,(N-k)(N-k-1)\frac{(1-p_1-p_2+p_3)^2+(p_1-p_3)^2}{(1-p_2)^2}\right] - (N-1)(N-2); \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \underset{x_i,x_N}{M}\{f_1(x_1)\,f_1(x_N)\,|\,N\} = 2\left[(k-1)\frac{(p_2-p_3)^2+p_3^2}{p_2^2} + \right.$$

$$\left. +\,(N-k)\frac{(p_2-p_3)(1-p_1-p_2+p_3)+p_3(p_1-p_3)}{p_2(1-p_2)}\right] - (N-1). \quad (21)$$

Подставим полученные результаты и соотношение (11) в (14) и выполним затем усреднение по N, используя для свертывания сумм формулу (3). Тогда после приведения подобных членов окончательно будем иметь

$$D\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} = \frac{k}{p_2^2}\left[1-p_2+4(p_1-1)(p_1-p_3)+4p_1(p_2-p_3)\right]. \quad (22)$$

Для нормального процесса $x(t)$ при параметре u, стремящемся к нулю и $\delta \leqslant u$, можно аналогично переходу (11)—(12) получить асимптотическое соотношение

$$D\left\{\sum_{i=1}^{N} f_1(x_i)\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{k\sigma}{u}. \quad (23)$$

Нетрудно далее убедиться, что асимптотический (в смысле стремления к нулю u и δ) коэффициент вариации построенной оценки, определяемый как отношение ее стандарта к математическому ожиданию, лишь в $(\pi/2)^{1/2}$ раза больше соответствующего коэффициента эффективной оценки, получаемой усреднением выборок x_i в количестве $M\{N\}$.

Таким образом, для стационарного случайного процесса с высоким коэффициентом вариации получен алгоритм оценивания математического ожидания, статистическая точность которого близка к предельно достижимой.

Алгоритм может быть использован в качестве основы для построения несложных преобразователей малых напряжений в цифровой код при наличии широкополосного интенсивного шума (отношение сигнал/шум менее 0,1). В этом случае параметр u имеет смысл опорного напряжения. Данная группа преобразователей является наименее исследованной [5]. В широко распро-

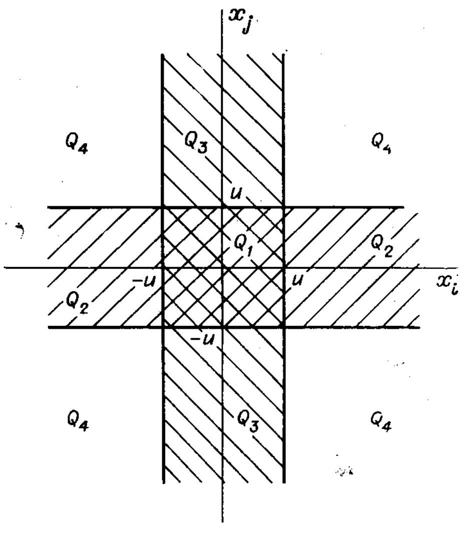

Рис. 2.

страненных преобразователях, работающих по принципу поразрядного кодирования [6], алгоритм может быть применен для увеличения статистической точности определения младших разрядов цифрового кода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Кавалеров, С. М. Мандельштам. Введение в информационную теорию измерений. М., «Энергия», 1974.
2. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., «Энергия», 1972.
3. П. П. Орнатский. Автоматические измерения и приборы. Киев, «Вища школа», 1973.
4. В. С. Гладкий. Устройство для вычисления математического ожидания.— Авт. свид-во № 354420, БИ, 1972, № 30.
5. В. П. Тарасов. О преобразовании малых напряжений в цифровой код.— «Приборостроение», 1971, № 3, с. 56—60.
6. Э. И. Гитис, О. А. Юланов. Состояние и тенденции развития разработок преобразователей напряжения в код в США.— «Приборы и сист. упр.», 1975, № 1, с. 45—46.

Поступила в редакцию 3 декабря 1975 г.; окончательный вариант — 3 марта 1976 г.

УДК 621.391.26 : 519.2

В. П. КРАСИН, Е. П. ЧУРАКОВ

(Рязань)

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Введение и постановка задачи. В теории управления и ряде смежных областей распространена задача построения оптимальной дискретной системы, которая в соответствии с заданным оператором наилучшим в определенном смысле образом преобразует некоторый сигнал по конечномерной апостериорной выборке из его смеси с шумом [1, 2]. Математически эта задача сводится к поиску наилучшей в принятом смысле оценки $\hat{h}$ величины $H^{T}A$ по значениям входного сигнала

$$V=FA+P. \tag{1}$$

Здесь V—$l+1$-мерный вектор апостериорных данных, i-й компонент $V_i(i=\overline{0,\ l})$ которого представляет значение входного сигнала системы в момент $t_i=iT$ ($T=\mathrm{const}$ — период квантования); A—$r+1$-мерный случайный или неизвестный вектор подлежащего преобразованию сигнала, причем его составляющие a_j, $j=\overline{0,\ r}$, физически представляют, например, значения сигнала и r его первых производных в конечной точке интервала наблюдения; F—$(l+1)\times(r+1)$ — матрица, определяющая структуру преобразуемого сигнала и имеющая при данной интерпретации вектора A вид

$$F=((-1)^{j}(1/j!)T^{j}(l-i)^{j}),\ i=\overline{0,\ l},\ j=\overline{0,\ r},\ 0^{0}=1,\ l>r;$$

P — вектор независимых от A шумов; H — известный вектор, постулирующий вид преобразования (прогноз, дифференцирование, интерполяцию и т. п.).