шает точность оценки. Лишь значительное (в несколько раз) увеличение частоты поступления измерений обеспечивает эффективное оценивание аэродинамического качества.

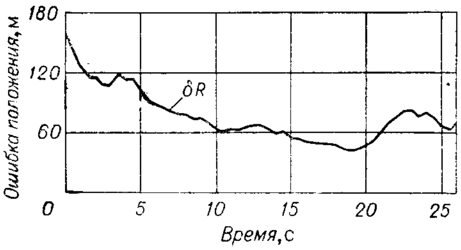

Рис. 5.

Время вычислений при обработке измерительной информации с помощью ФК определяется в основном размерностью вектора состояния: оно возрастает примерно пропорционально кубу этой размерности. Принимая во внимание, что, как было отмечено выше, включение аэродинамического качества в вектор состояния может не давать желаемого эффекта с точки зрения точности оценивания, увеличивая вместе с тем время вычислений, целесообразно ограничиться рассмотрением первой и второй из упомянутых выше модификаций ФК. Первая модификация, также устраняющая расходимость процесса фильтрации, требует наименьшего времени вычислений, но, как показали эксперименты, точность оценивания оказывается неудовлетворительной. В этих случаях может быть рекомендовано применение второй модификации, приемлемой и с точки зрения точности оценивания, и с точки зрения затрат машинного времени.

На рис. 5 приведена эволюция усредненной ошибки оценки положения δR для второй модификации ФК. Эта зависимость получена усреднением по 30 реализациям последовательности измерений. Начальные ошибки в задании каждого из обоих аэродинамических параметров составляли 20%.

Изложенные результаты позволяют сделать вывод о том, что при использовании ФК для оценивания траектории движения в атмосфере целесообразно комбинирование различных способов предотвращения расходимости процесса фильтрации, вызываемой неопределенностью задания аэродинамических параметров объекта. При этом выбор варианта модификации ФК может быть обоснован результатами моделирования на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение оптимальных фильтров в системах управления ракет и космических аппаратов. (Обзор.) — «Вопросы ракетной техники», 1974, № 5, с. 44—63.
2. Ф. Х. Шли, К. Д. Стэндиш, Н. Ф. Тода. Расходимость фильтрации по методу Калмана.— «Ракетная техника и космонавтика», 1967, т. 5, № 6, с. 73—81.
3. Р. Е. Калман, Р. С. Бьюси. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания.— «Тр. Амер. об-ва инж.-механ. Сер. Д», 1961, т. 83, № 1, с. 95—108.
4. Дж. Мартин. Вход в атмосферу. М., «Мир», 1969.

*Поступило в редакцию 2 марта 1975 г.;
окончательный вариант — 7 октября 1975 г.*

УДК 62.506.225.001.57 : 615.471

В. В. АЛЕКСАНДРОВ, Ю. С. ЮРЧЕНКО

(Ленинград)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИНОМИНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ УОЛША

1. Дискретное преобразование Уолша, имеющее быстрый алгоритм вычислений, является одним из наиболее простых методов обработки больших массивов информации [1]. Однако если наблюдается N отсчетов некоторой величины, то спектр Уолша также состоит из N линий и возникает проблема выбора части линий спектра.

Рассмотрим решение этой проблемы на примере оценивания коэффициентов полинома степени $(p-1)$ вида

$$P_{p-1}(m)=b_1+b_2(m-(N-1)/2)+\ldots+b_p(m-(N-1)/2)^{p-1}, \qquad (1)$$

где $m=\overline{0, N-1}$; $N=2^n$, $b_1, b_2, \ldots, b_p$ — неизвестные коэффициенты.

Предполагается, что имеются наблюдения

$$z(m) = P(m) + w(m), \tag{2}$$

где $w(m)$ — ошибка наблюдения, $M[w(m)]=0$, $M[w(m)w(j)]=0$ при $j \neq m$ и $M[w(m)w(m)] = \sigma^2$.

2. Задача заключается в том, чтобы оценить p неизвестных значений коэффициентов полинома по p составляющим спектра Уолша. Решение этого вопроса позволяет предложить простые в вычислительном отношении методы оценивания. Заметим, что предлагаемый метод оценивания коэффициентов отличается от применения полиномов Уолша для приближения функций [2].

3. Для решения поставленной задачи используем следующие свойства матрицы Адамара, представляющий собой определенное упорядочивание функций Уолша [1].

Свойство 1. Функция Уолша h_{N-1} в последней строке матрицы Адамара H_n ортогональна полиному степени $(n-1)$. Свойство доказывается методом индукции.

Свойство 2. Полином степени $(k-l)$, где $k<n$, $l=\overline{1,\ k}$, ортогонален строке матрицы Адамара H_n с номером $(2^k-1)2^{n-k}+1$.

Это свойство доказывается на основании свойства 1 и правила образования матрицы размерности $N=2^n$, $H_n = H_1 \otimes H_{n-1}$, где $\otimes$ знак кронекерова произведения.

В работе предполагается, что функции Уолша распределены в матрице Адамара в естественном порядке, который получается при кронекеровом умножении [1].

Таким образом, полиномы степени p при $p<k\leqslant n$ не имеют составляющих Уолша с номерами $(2^k-1)2^{n-k}$. Благодаря этому, линии спектра с номерами $(2^k-1)2^{n-k}$, $k=\overline{0,\ n}$, можно использовать для оценки коэффициентов полинома n-й степени.

Заметим, что номера этих линий в двоичной записи имеют вид $000\ldots0$, $100\ldots0$, $110\ldots0$, $111\ldots0$ и т. д. (разрядность двоичного кода равна n).

4. На основании свойства 2 построим систему из n полиномов, ортогональных к $(n-1)$ из n строк матрицы Адамара с номерами $(2^k-1)2^{n-k}+1$, $k=\overline{1,\ n}$.

Полином первой степени имеет вид $P_1^0 = \left(m - \dfrac{N-1}{2}\right)$ и ортогонален строкам с номерами $(2^k-1)2^{n-k}+1$, $k=\overline{2,\ n}$.

Полиномы более высоких степеней строятся так, чтобы они не вносили помех в линии спектра с малыми номерами:

$$P_k^0 = \left(m - \frac{N-1}{2}\right)^k - \sum_{i=1}^{[k/2]} \alpha_{ki} P_{k-2i}^0 \quad (k = 2,\ n), \tag{3}$$

где α_{ki} определяется из условия

$$\left[h_{(2^k-i2_{-1})2^{n-k+i2}}\right] P_k^0(m) = 0.$$

Для матрицы Адамара H_n можно построить всего n таких полиномов.

Представляя выражения (1) в виде

$$P_p(m) = b_0' + \sum_{k=1}^{n} b_k' P_k^0(m), \tag{4}$$

можно определить оценку коэффициентов b_k' для составляющих с номерами $(2^k-1)2^{n-k}$, $k=\overline{0,\ n}$.

Полученные при этом оценки являются несмещенными и состоятельными, однако они не являются оценками с минимальной дисперсией, так как энергия отдельных спектральных составляющих полинома $P_p(m)$ распределяется также и по спектральным линиям, которые мы не учитываем.

5. Произведем расчет дисперсии оценок при использовании функций Уолша и сравним полученные значения с обычным методом наименьших квадратов для полинома третьего порядка, представив его в виде

$$P_3(m) = b_0' + b_1' \left(m - \frac{N+1}{2}\right) + b_2' \left[\left(m - \frac{N+1}{2}\right)^2 - \alpha_2\right] + \\ + b_3' \left[\left(m - \frac{N+1}{2}\right)^3 - \alpha_3 \left(m - \frac{N+1}{2}\right)\right],$$

где из условия ортогональности $\alpha_2 = 1/12(N^2-1)$ и $\alpha_3 = 1/4(0{,}5N^2-1)$.

Коэффициенты b_k связаны с b'_k выражениями

$$b_0 = b'_0 - \alpha_2 b'_2, \quad b_1 = b'_1 - \alpha_3 b'_3, \quad b_2 = b'_2, \quad b_3 = b'_3. \tag{5}$$

Значения b'_m определим из составляющих с номерами $(2^m-1)2^{n-m}$.

Величина выбранных составляющих спектра равна:

$$\begin{gathered}
\sum_{m=1}^{N} b'_0 h_0(m) = b'_0 N = b'_0 2^n; \\
\sum_{m=1}^{N} b'_1 \left(m - \frac{N+1}{2}\right) h_{2^{n-1}}(m) = -b'_1 2^{2n-2}; \\
\sum_{m=1}^{N} b'_2 \left(m - \frac{N+1}{2}\right)^2 h_{3\cdot 2^{n-2}}(m) = b'_2 2^{3n-4}; \\
\sum_{m=1}^{N} b'_3 \left(m - \frac{N+1}{2}\right)^3 h_{7\cdot 2^{n-3}}(m) = b'_3 3\cdot 2^{4n-8}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Выражения (6) используем для расчета оценок b'_k.

Исходя из того, что дисперсия каждой спектральной составляющей равна $N\sigma^2$, получим дисперсии оценок коэффициентов $b'_0,\ b'_1,\ b'_2,\ b'_3$:

$$\begin{gathered}
\sigma^2\left[b'_0\right] = \sigma^2 2^{-n}; \quad \sigma^2\left[b'_1\right] = \sigma^2 2^{-3n+4}; \\
\sigma^2\left[b'_2\right] = \sigma^2 2^{-5n+8}; \\
\sigma^2\left[b'_3\right] = \sigma^2 2^{-7n+16}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Дисперсия оценок коэффициентов b_0 и b_1 определяется на основании выражений (5) и (7):

$$\begin{gathered}
\sigma^2[b_1] = \sigma^2\left[2^{-3n+4} + \alpha_3^2 2^{-\ n+16}\right]; \\
\sigma^2[b_0] = \sigma^2\left[2^{-n} + \alpha_2^2 2^{-5n+8}\right].
\end{gathered}$$

При использовании метода наименьших квадратов дисперсия оценки коэффициентов b_m равна [3]

$$\sigma^2[b_m] = \sigma^2 a^{mm},$$

где a^{mm} — элементы матрицы $(A^T A)^{-1}$, $m = \overline{1,\ k}$, A — матрица модели исследуемого процесса.

Сравнение дисперсий для различных методов приводится в таблице.

Методы	Отношение дисперсий			
	$\sigma^2[b_0]/\sigma^2$	$\sigma^2[b_1]/\sigma^2$	$\sigma^2[b_2]/\sigma^2$	$\sigma^2[b_3]/\sigma^2$
Метод наименьших квадратов	$1{,}43\cdot 10^{-1}$	$1{,}84\cdot 10^{-2}$	$1{,}78\cdot 10^{-4}$	10^{-5}
Метод с функциями Уолша	$1{,}73\cdot 10^{-1}$	$3{,}1\cdot 10^{-2}$	$2{,}44\cdot 10^{-4}$	$2{,}71\cdot 10^{-5}$

Особенно простой алгоритм оценки получается для полинома первой степени. Предположим, что требуется усреднить N отсчетов параметра, изменяющегося по линейному закону. При этом простое усреднение путем расчета среднего арифметического даст динамическую погрешность, пропорциональную скорости изменения параметра. Чтобы устранить эту погрешность, используем метод наименьших квадратов. Значение оценки параметра после N-го измерения равно

$$P_1^*(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i + \frac{6}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{N} z_i\left(i - \frac{N+1}{2}\right).$$

Дисперсия этого значения составляет

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{3(N-1)}{N(N+1)}\right]. \tag{8}$$

Предлагаемый алгоритм дает значение оценки

$$P_1(N) = \frac{1-0,5N}{0,5N^2} \sum_{i=1}^{0,5N} z_i + \frac{1,5N-1}{0,5N^2} \sum_{i=0,5N+1}^{N} z_i$$

с дисперсией

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{4(N-1)^2}{N^3}\right]. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) следует, что для $N \gg 1$ дисперсии оценок относятся как 4 : 5.

Сравнение объема вычислений показывает (для полинома первой степени), что метод наименьших квадратов требует выполнения $(N+2)$ операций умножения, а предлагаемый алгоритм — 2 операции умножения на рациональные числа. Кроме того, не требуется запоминать или рассчитывать элементы матрицы A.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Логинов. Функции Уолша и области их применения.— «Зарубеж. радиоэлектроника», 1973, № 4, с. 73.
2. Б. Т. Поляк, Ю. А. Шрейдер. Применение полиномов Уолша для приближения функций.— В кн.: Вопросы теории математических машин. Под ред. Ю. А. Базилевского. Сб. 2. М., Физматгиз, 1962.
3. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.

Поступило в радакцию 20 ноября 1974 г.;
окончательный вариант — 17 октября 1975 г.

УДК 519.24

А. М. АЗИЗОВ

(Ленинград)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОГО КЛАССА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе [1] рассмотрены некоторые вопросы статистической динамики простейших измерительных систем с распределенными параметрами. В настоящем сообщении мы ставим цель — получить точное решение краевой задачи, описывающей поведение таких систем, и учесть влияние коррелированности параметра системы с входным процессом на показания этих систем.

Пусть рассматриваемые системы описываются следующими уравнениями и краевыми условиями:

$$\frac{\partial И(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 И(x,t)}{\partial x^2} + m(t)\left[\theta_0(t) - И(x,t)\right]; \tag{1}$$

$$И(x,t)\big|_{x=\pm l_0} = t_c; \quad И(x,t)\big|_{t=0} = И_0. \tag{2}$$

В такой постановке задачи анализа измерительные системы являются нестационарными, так как параметр $m(t)$ считается функцией времени. В (1), (2) введены обозначения: $И(x, t)$ — локальная реакция измерительной системы; l_0, a, $m(t)$ — параметры системы; $\theta_0(t)$ — измеряемая характеристика исследуемого процесса; t_0, $И_0$ — постоянные величины.