УДК 543.42

В. А. ГЕРАНИН, А. Н. ПРОДЕУС, Г. Д. СИМОНОВА,
М. И. ШЛЯКЦУ
*(Киев)*

# АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕГАУССОВОСТИ НА ТОЧНОСТЬ СПЕКТРОМЕТРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

К проблеме негауссовости в задачах спектрометрии случайных процессов (СП) относятся специалисты по-разному. Одни считают, что этой проблемы вовсе не существует, так как полоса прозрачности избирательного элемента анализатора, по крайней мере, на порядок ýже эффективной ширины измеряемого спектра и отклик такого фильтра гауссов при любом законе распределения воздействия. Другие высказываются более осторожно: узкополосный фильтр нормализует широкополосный процесс, по-видимому, не всегда. Поэтому исследование погрешностей спектрометрии негауссовых СП — задача, представляющая определенный прикладной интерес. С тем, что решить эту дилемму на уровне общих рассуждений не удается, согласны и те, и другие. Однако очевидная сложность задачи сыграла гипнотическое действие: до сих пор не получены даже ориентировочные результаты.

Ниже предпринята попытка оценить характер и степень влияния негауссовости на точность спектрометрии СП. Рассмотрим этот вопрос применительно к периодограмманализу при условиях [1], когда он эквивалентен фильтровому и корреляционному методам измерения спектров стационарных СП.

Дисперсия квадратично-модифицированной [2] периодограммы

$$\widetilde{G}(\omega_0)=\frac{1}{2\pi T}\int_0^T\int_0^T X(t_1)X(t_2)v_Q(t_1-t_2)e^{-j\omega_0(t_1-t_2)}\,dt_1dt_2 \qquad (1)$$

может быть представлена в виде суммы

$$D_{\text{нг}}[\widetilde{G}(\omega_0)]=D_{\text{г}}[\widetilde{G}(\omega_0)]+\Delta D[\widetilde{G}(\omega_0)], \qquad (2)$$

где

$$D_{\text{г}}\left[\widetilde{G}(\omega_0)\right]=\frac{1}{(2\pi T)^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T A(t_1,t_2,t_3,t_4)v_Q(t_1-t_2)v_Q(t_3-t_4)\times$$
$$\times e^{-j\omega_0(t_1-t_2-t_3+t_4)}\,dt_1dt_2dt_3dt_4 \qquad (3)$$

— дисперсия периодограммы эквивалентного гауссова процесса;

$$\Delta D\left[\widetilde{G}(\omega_0)\right]=\frac{1}{(2\pi T)^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T C(t_1,t_2,t_3,t_4)v_Q(t_1-t_2)v_Q(t_3-t_4)\times$$
$$\times e^{-j\omega_0(t_1-t_2-t_3+t_4)}\,dt_1dt_2dt_3dt_4 \qquad (4)$$

— прирост дисперсии за счет негауссовости,

$$C(t_1,t_2,t_3,t_4)=\langle X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)\rangle-R(t_1-t_2)\times$$
$$\times R(t_3-t_4)-A(t_1,t_2,t_3,t_4); \qquad (5)$$

$$A(t_1,t_2,t_3,t_4)=R(t_1-t_3)R(t_2-t_4)+R(t_1-t_4)R(t_2-t_3). \qquad (6)$$

Рассмотрим две модели негауссова ССП $X(t)$.

**Модель первая:**

$$X_{\mathrm{I}}(t)=Z(t)\cos(\Omega_0 t-\Psi), \tag{7}$$

где $Z(t)$ — центрированный гауссов ССП с функцией корреляции $R_z(\tau)$; $\Psi$ — не зависящая от $Z(t)$ случайная величина с равномерным распределением на интервале длиной $2\pi$.

**Модель вторая:**

$$X_{\mathrm{II}}(t)=Z_1(t)Z_2(t), \tag{8}$$

где $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ — независимые центрированные гауссовы ССП с функциями корреляции $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ соответственно.

Вычислим компоненты дисперсии (2) для каждой модели.

Модель (7). Такой модели соответствуют $A(t_1, t_2, t_3, t_4)$ и $C(t_1, t_2, t_3, t_4)$ вида

$$A_{\mathrm{I}}(t_1, t_2, t_3, t_4)=1/4[R_z(t_1-t_3)R_z(t_2-t_4)\cos\Omega_0(t_1-t_3)\cos\Omega_0(t_2-t_4)+ \\ +R_z(t_1-t_4)R_z(t_2-t_3)\cos\Omega_0(t_1-t_4)\cos\Omega_0(t_2-t_3)]; \tag{9}$$

$$C_{\mathrm{I}}(t_1, t_2, t_3, t_4)=1/4[R_z(t_1-t_3)R_z(t_2-t_4)+R_z(t_1-t_4)R_z(t_2-t_3)]\times \\ \times\cos\Omega_0(t_1-t_2)\cos\Omega_0(t_3-t_4)-(1/8)R_z(t_1-t_3)R_z(t_2-t_4)\times \\ \times\cos\Omega_0(t_1-t_2-t_3+t_4)-(1/8)R_z(t_1-t_4)R_z(t_2-t_3)\cos\Omega_0(t_1-t_2+ \\ +t_3-t_4)+(1/8)R_z(t_1-t_2)R_z(t_3-t_4)\cos\Omega_0(t_1+t_2-t_3-t_4). \tag{10}$$

Модель (8). В этом случае $A(t_1, t_2, t_3, t_4)$ и $C(t_1, t_2, t_3, t_4)$ таковы:

$$A_{\mathrm{II}}(t_1, t_2, t_3, t_4)=R_1(t_1-t_3)R_1(t_2-t_4)R_2(t_1-t_3)R_2(t_2-t_4)+ \\ +R_1(t_1-t_4)R_1(t_2-t_3)R_2(t_1-t_4)R_2(t_2-t_3); \tag{11}$$

$$C_{\mathrm{II}}(t_1, t_2, t_3, t_4)=R_1(t_1-t_4)R_1(t_2-t_3)R_2(t_1-t_3)R_2(t_2-t_4)+ \\ +R_1(t_1-t_3)R_1(t_2-t_4)R_2(t_1-t_4)R_2(t_2-t_3)+R_1(t_1-t_3)R_1(t_2-t_4)\times \\ \times R_2(t_1-t_2)R_2(t_3-t_4)+R_1(t_1-t_4)R_1(t_2-t_3)R_2(t_1-t_2)R_2(t_3-t_4)+ \\ +R_1(t_1-t_2)R_1(t_3-t_4)R_2(t_1-t_3)R_2(t_2-t_4)+R_1(t_1-t_2)R_1(t_3-t_4)\times \\ \times R_2(t_1-t_4)R_2(t_2-t_3). \tag{12}$$

Сравним теперь значения $D_{\text{г}}[\bar{G}(\omega_0)]$, $D_{\text{нг}}[\bar{G}_{\mathrm{I}}(\omega_0)]$, $D_{\text{нг}}[\bar{G}_{\mathrm{II}}(\omega_0)]$, полагая

$$v_Q(\tau)=Sa(\Delta\omega\tau/2), \tag{13}$$

$$R(\tau)=R_{\text{г}}(\tau)=R_{\mathrm{I}}(\tau)=R_{\mathrm{II}}(\tau)=4F\Delta\Omega Sa^2(\Delta\Omega\tau)\cos\Omega_0\tau. \tag{14}$$

Это соответствует спектральному окну

$$S_{v_Q}(\omega)=\frac{1}{\Delta\omega}\operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \tag{15}$$

и при соблюдении условий

$$G_z(\omega)=[G_z(\omega_0)+a(\omega_0-|\omega|)]\operatorname{rect}(\omega/4\Delta\Omega), \tag{16}$$

$$G_z(0)=4F\Delta\Omega, \tag{17}$$

$$\Omega_0=\Delta\Omega,\ G_1(\omega)=G_1(0)\operatorname{rect}(\omega/2\Delta\Omega),\ G_2(\omega)=G_2(0)\operatorname{rect}(\omega/4\Delta\Omega), \\ F=2G_1(0)G_2(0)\Delta\Omega$$

анализируемому спектру вида (рис. 1)

$$G(\omega)=G_{\Gamma}(\omega)=G_{\rm I}(\omega)=G_{\rm II}(\omega)=\begin{cases} F, & -\Delta\Omega\leqslant\omega\leqslant\Delta\Omega;\\ -\frac{F}{2\Delta\Omega}(|\omega|-3\Delta\Omega), & \Delta\Omega\leqslant|\omega|\leqslant3\Delta\Omega;\\ 0, & \omega. \end{cases} \quad (18)$$

Пределы изменения параметров $\Delta\omega$ и $\omega_0$ ограничим неравенствами

$$\left.\begin{array}{l} 0\leqslant\Delta\omega\leqslant3\Delta\Omega;\\ \Delta\omega/2\leqslant\omega_0\leqslant3\Delta\Omega-\Delta\omega/2. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Выкладки и окончательные аналитические выражения сравниваемых дисперсий громоздки, поэтому результаты расчетов * представлены графически.

Содержание (рис. 2, *а*, *б*, *в*) — **зависимость**

$$u_l(\omega_0', \Delta\omega')=\frac{\Delta D\left[\tilde{G}_l(\omega_0')\right]}{D_{\Gamma}\left[\tilde{G}_l(\omega_0')\right]} \quad (l={\rm I}, {\rm II}) \quad (20)$$

от $\omega_0'=\omega_0/\Delta\Omega$ при $\Delta\omega'=\Delta\omega/\Delta\Omega=0{,}01$, $\Delta\omega'=0{,}2$ и $\Delta\omega'=1{,}5$.

На рис. 3 *а*, *б*, *в* приведена зависимость $u_l(\omega_0', \Delta\omega')$ от $\Delta\omega'$ при $\omega_0'=0{,}9; 1; 2$. Сплошная линия соответствует модели (7), пунктирная— модели (8).

Область ненулевых значений приращения дисперсии $\Delta D[\tilde{G}_{\rm I}(\omega)]$ на рис. 4 заштрихована **. Следовательно, $\Delta D[\tilde{G}_{\rm I}(\omega)]$ отлично от нуля, если спектральное окно накрывает частоту $\Omega_0$. Чем ближе $\omega_0$ к этой частоте, тем больше $\Delta D[\tilde{G}_{\rm I}(\omega_0)]$ (см. рис. 2). С увеличением $\Delta\omega'$ отношение (20) растет (см. рис. 3)***. Исключение составляет случай $\omega_0'=1$ (и окрестность этой точки длиной в несколько сотых). Пояснить это можно так. Представим $Z(t)$ в виде

$$Z(t)=\sum_{i=0}^{2N} Z_i(t), \quad (21)$$

где $Z_i(t)$—СП, спектр которого

$$G_i(\omega)=G_z(i\Delta\omega)\,{\rm rect}[(|\omega|-i\Delta\omega_1)/\Delta\omega_1]. \quad (22)$$

Это соответствует

$$X_{\rm I}(t)=\sum_{i=1}^{N} X_{{\rm I}i}(t), \quad (23)$$

где

$$X_{{\rm I}i}(t)=Z_i(t)\cos(\Omega_0 t-\Psi). \quad (24)$$

---

* Здесь и ниже уровень приближения характеризует соотношение $Sa^2(\omega T/2)\simeq\simeq(2\pi/T)\delta(\omega)$. Оно обеспечивает приемлемую в инженерных расчетах точность при $\Delta\omega T\gg1$, где $\Delta\omega$ — ширина спектрального окна.

** Отметим, что условия, при которых $\Delta D[G_{\rm I}(\omega_0)]\neq0$, не отличаются от условий нестационарности отлика ИПФ на воздействие $X(t)=Z(t)\cos(\Omega_0 t-\Psi_0)$ с фиксированной $\Psi_0$.

*** Характерна величина $u_{\rm I}(1{,}5;\ 3)=0{,}8$; это сочетание $\omega_0', \Delta\omega'$ соответствует измерению дисперсии негауссова процесса (7).

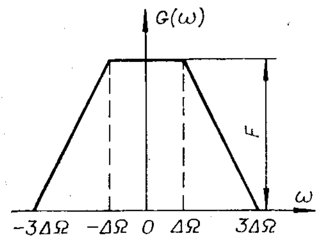


Рис. 1.

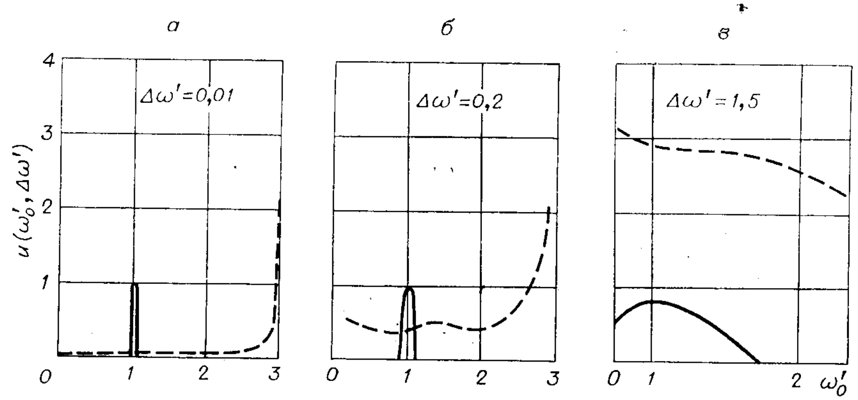


Рис. 2.

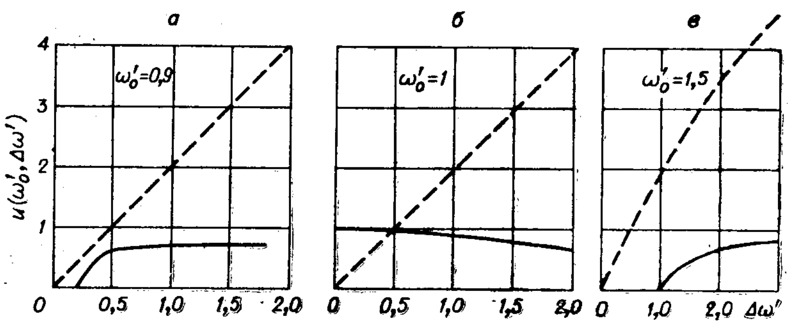


Рис. 3.

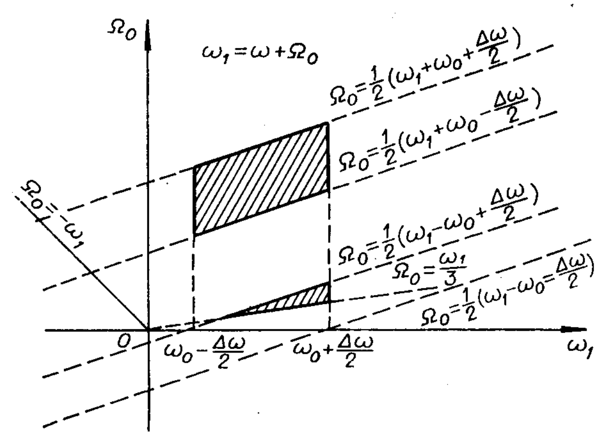


Рис. 4.

Подчеркнем взаимную зависимость слагаемых в (23): все они содержат одну и ту же случайную фазу $\Psi$. Отклик фильтра будет негауссовым лишь в том случае, если в полосу прозрачности попадет хотя бы одна элементарная негауссова компонента вида (24). Последнее возможно лишь при условии, если частота $\Omega_0$ попадает в полосу прозрачности фильтра.

Вследствие некоррелированности компонент $X_{\mathrm{I}i}(t)$

$$\Delta D\left[\widetilde{G}_{\mathrm{I}}(\omega)\right] = \sum_{i=0}^{N} \Delta D_i, \qquad (25)$$

причем нетрудно показать, что

$$\Delta D_i \simeq \frac{\pi}{T} G_z^2(i\Delta\omega_1)\Delta\omega_1. \qquad (26)$$

Так как $G_z(\omega)$ — треугольник (см. (16)), наибольший вклад в $\Delta D[\widetilde{G}_{\mathrm{I}}(\omega)]$ вносят компоненты $X_{\mathrm{I}}(t)$ в окрестности $\omega = \Omega_0$. Этим и объясняется характер изменения сплошных кривых на рис. 3, в частности убывание $u_{\mathrm{I}}(1;\ \Delta\omega')$ (см. рис. 3, *б*).

Заметим, что при $\Delta\omega' \to 0$* $\Delta D[\widetilde{G}_{\mathrm{I}}(\omega_0)]$ на частоте $\omega_0 = \Omega_0$ не аннулируется: $u_{\mathrm{I}}(1;\ 0) = 1$. Это объясняется тем, что при $\omega_0' = 1$ негауссов СП $X_{\mathrm{I}i}(t)|_{i=0}$ остается в полосе прозрачности фильтра, сколь угодно малой.

Кратко поясним закономерности, присущие модели (8). Аппроксимируем $G_1(\omega)$, $G_2(\omega)$, $G_{\mathrm{II}}(\omega)$ суммами слагаемых вида (22)

$$G_1(\omega) = \sum_{i=0}^{N} G_{1i}(\omega), \quad G_2(\omega) = \sum_{j=0}^{2N} G_{2j}(\omega), \quad G_{\mathrm{II}}(\omega) = \sum_{k=0}^{3N} G_{\mathrm{II}k}(\omega). \qquad (27)$$

Существенно, что алгоритм формирования каждой спектральной компоненты $G_{\mathrm{II}}(\omega)$ имеет вид

$$G_{\mathrm{II}k}(\omega) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{2N} G_{\mathrm{II}kij}(\omega), \qquad (28)$$

причем элементарный СП со спектром

$$G_{\mathrm{II}kij}(\omega) = \mathrm{rect}\,[(|\omega| - k\Delta\omega_1)/\Delta\omega_1] \int_{-\infty}^{\infty} G_{1i}(\nu) G_{2j}(\omega - \nu)\, d\nu \qquad (29)$$

негауссов. Предположим, что в полосу прозрачности фильтра попадают две смежные [$k$-я и $(k+1)$-я] спектральные компоненты $X_{\mathrm{II}}(t)$. Пусть $k = 14$ и $N = 10$. Совокупность ненулевых слагаемых сумм $\widetilde{G}_{\mathrm{II}14}(\omega)$ и $\widetilde{G}_{\mathrm{II}15}(\omega)$ (см. (28)) представим в виде таблицы.

| $k=14$ | | $k+1=15$ | |
|---|---|---|---|
| $k=j+i$ | $k=j-i$ | $k=j+i$ | $k=j-i$ |
| 14+0 | | 15+0 | |
| 13+1 | 15—1 | 14+1 | 16—1 |
| 12+2 | 16—2 | 13+2 | 17—2 |
| 11+3 | 17—3 | 12+3 | 18—3 |
| 10+4 | 18—4 | 11+4 | 19—4 |
| 9+5 | 19—5 | 10+5 | 20—5 |
| 8+6 | 20—6 | 9+6 | |
| 7+7 | | 8+7 | |
| 6+8 | | 7+8 | |
| 5+9 | | 6+9 | |
| 4+10 | | 5+10 | |

Прирост дисперсии оценки спектра за счет негауссовости — сумма вида

$$\Delta D\left[\widetilde{G}_{\mathrm{II}}(\omega_0')\right] = \Delta D_1(\omega_0') + \Delta D_2(\omega_0') + \Delta D_3(\omega_0') + \Delta D_4(\omega_0'), \qquad (30)$$

где $\Delta D_1(\omega_0')$ — вклад в $\Delta D\left[\widetilde{G}_{\mathrm{II}}(\omega_0')\right]$, вносимый элементарными спект-

* При аппроксимации $X_{\mathrm{I}}(t)$ типа (23) это соответствует $\Delta\omega' \longrightarrow \Delta\omega_1$.

ральными компонентами (ЭСК) суммарных частот (14+0 и 14+1; 11+3 и 12+3 и т. д.); $\Delta D_2(\omega_0')$ — вклад ЭСК разностных частот

Значения $\Delta D_1(\omega_0')$, $\Delta D_2(\omega_0')$, $\Delta D_3(\omega_0')$ и $\Delta D_4(\omega_0')$ представлены на рис. 5, *а* (кривые *1—4* соответственно). Их производные (по $\omega_0'$) приведены на рис. 5, *б*. Функция $\Delta D\left[\widetilde{G}_{\rm II}(\omega_0')\right]$ и ее производная — кривые *5* и *5'*. На рис. 5, *в* показаны дисперсия $D_{\rm г}\left[\widetilde{G}_{\rm г}(\omega_0')\right]$ и ее производная (линии *1* и *1'*). Эти кривые полезны для анализа графиков рис. 2 и 3.

Дробь $u_{\rm II}(\omega_0', \Delta\omega')$ на участке $\frac{\Delta\omega'}{2} \leqslant \omega_0' \leqslant 1$ убывает потому, что $\Delta D_2(\omega_0)$ уменьшается, а величина $D_{\rm г}=[\widetilde{G}(\omega_0)]$ не изменяется. Слабовыраженный локальный минимум на частоте $\omega_0' = 1$ обусловлен быстрым изменением $D_{\rm г}[\widetilde{G}(\omega_0)]$ и ее производной в окрестности этой частоты. Второй локальный минимум на частоте $\omega_0' = 2$ поясняется скачками производных $\Delta D_2(\omega_0')$, $\Delta D_3(\omega_0')$ и $\Delta D_4(\omega_0')$. Он выражен еще слабее и наблюдается при $0 \leqslant \Delta\omega' \leqslant 0{,}2$. Чем шире спектральное окно, тем больше пар ЭСК попадает в полосу $\Delta\omega$, тем существеннее влияние негауссовости $X_{\rm II}(t)$ на точность измерения $G_{\rm II}(\omega_0)$ (см. рис. 3)*.

Значения

$$b(\omega_0', \Delta\omega', T) = \frac{D^{1/2}\left[\widetilde{G}(\omega_0')\right]}{G(\omega_0')} \tag{31}$$

при $\Delta\omega'=0{,}2$ и $\omega_0' = 0{,}92;\ 1;\ 1{,}5$ приведены на рис. 6, *а — в* сплошными ($b_{\rm I}$), пунктирными ($b_{\rm II}$) и штрихпунктирными ($b_{\rm г}$) линиями. Заметим, что фактически аргумент на этом рисунке — длина реализации $T$ ($\Delta\omega$ фиксировано). Кривые свидетельствуют о том, что $\Delta D[\widetilde{G}(\omega_0)] \geqslant 0$, причем знак неравенства между $D_{\rm нг}[\widetilde{G}_{\rm I}(\omega_0)]$ и $D_{\rm нг}[\widetilde{G}_{\rm II}(\omega_0)]$ может быть любым. Так, например, во всем рассматриваемом диапазоне значений $T$

$$\frac{D_{\rm НГ}^{1/2}\left[\widetilde{G}_{\rm I}(\omega_0)\right]}{D_{\rm г}^{1/2}\left[\widetilde{G}_{\rm I}(\omega_0)\right]} = \begin{cases} 1{,}4, & \Delta\omega' = 0{,}2, \quad \omega_0' = 1; \\ 1{,}13, & \Delta\omega' = 0{,}2, \quad \omega_0' = 0{,}92, \end{cases}$$

а отношение

$$\frac{D_{\rm НГ}^{1/2}\left[\widetilde{G}_{\rm II}(\omega_0)\right]}{D_{\rm г}^{1/2}\left[\widetilde{G}_{\rm II}(\omega_0)\right]} = 1{,}2$$

в обоих случаях (см. рис. 6, *а, б*). Следовательно,

$$\frac{D_{\rm НГ}\left[\widetilde{G}_{\rm I}(\omega_0)\right]}{D_{\rm НГ}\left[\widetilde{G}_{\rm II}(\omega_0)\right]} = \begin{cases} 1{,}36, & \Delta\omega' = 0{,}2^{**}, \quad \omega_0' = 1; \\ 0{,}88, & \Delta\omega' = 0{,}2, \quad \omega_0' = 0{,}92. \end{cases}$$

Иными словами, в первом случае $b_{\rm I}(\omega_0', \Delta\omega', T)$ на 40%, $b_{\rm II}(\omega_0', \Delta\omega', T)$ на 20% превышают $b_{\rm г}(\omega_0', \Delta\omega', T)$. Во втором случае это превышение

* $u_{\rm II}(1{,}5;\ 3) = 4{,}6$ характеризует влияние негауссовости на точность измерения дисперсии $X_{\rm II}(t)$.

** Заметим, что при одинаковой точности измерения $G_{\rm I}(\omega)$ и $G_{\rm II}(\omega)$ полоса прозрачности фильтра в первом случае шире, кроме ситуации $\omega_0' = 1$ (см. рис. 3).

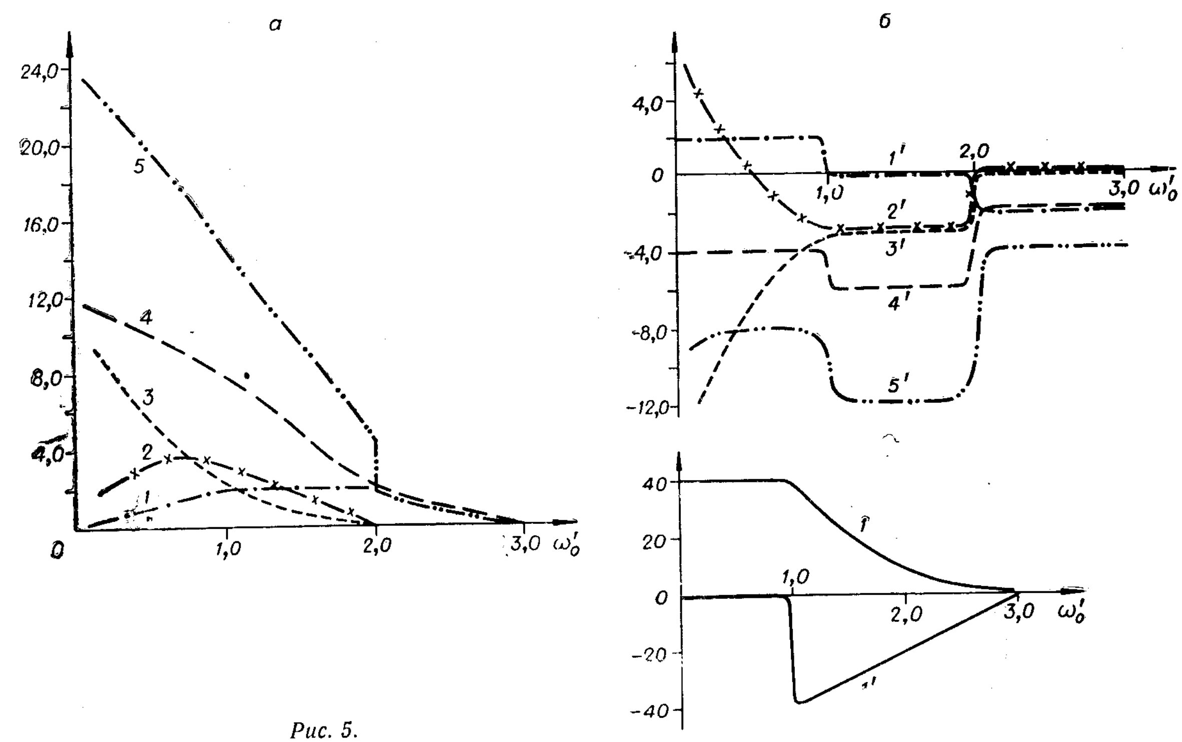
а
24,0
20,0
16,0
12,0
8,0
4,0
0
1,0
2,0
3,0
$\omega_0'$
1
2
3
4
5
б
4,0
0
-4,0
-8,0
-12,0
1,0
2,0
3,0
$1'$
$2'$
$3'$
$4'$
$5'$
40
20
-20
-40


Рис. 5.

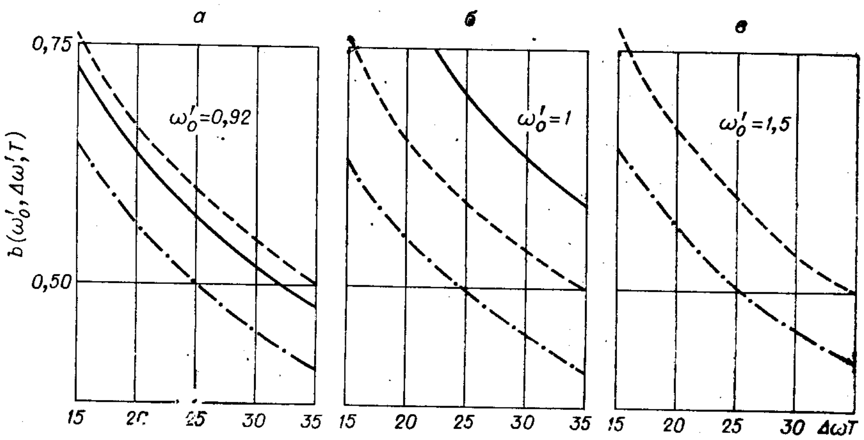


*Рис. 6.*

составляет 13 и 20% соответственно. Для равной точности измерения длительность реализации негауссова процесса должна быть больше отрезка $X_г(t)$, например, $X_I(t)$ в 2 раза, $X_{II}(t)$ в 1,5 раза, если $\Delta\omega'=0{,}2$, $\omega_0'=1$.

Таким образом, негауссовость сказывается на результатах измерения спектра СП и иногда весьма существенно, поэтому игнорировать ее нельзя.

В заключение подчеркнем, что известное положение о нормализации СП узкополосной линейной системой справедливо не всегда: $u_I(1;\,0)=1$, $u_{II}(3;\,0)=2$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. А. Геранин, Т. Т. Новикова, Г. Д. Симонова. Условия принципиальной эквивалентности основных методов статистического спектрального анализа стационарных случайных процессов.— Труды VI Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., Изд. ВНИИЭП, 1973.
2. В. А. Геранин. Современный периодограмманализ стационарных случайных процессов.— Труды IV Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., Изд. ВНИИЭП, 1971.



*Поступила в редакцию 21 октября 1974 г.;*
*окончательный вариант — 23 октября 1975 г.*


---


УДК 551.501 : 527



**С. М. ЯКУШИН**

*(Астрахань)*


# МЕТОД ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИМИ СРЕДСТВАМИ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ФОНЕ ЗВЕЗД

Несмотря на успехи в применении электроники, не отпала необходимость в использовании оптических измерительных средств для исследования движения космических объектов (КО) в пространстве. Один из основных видов оптических средств, применяемых для этих целей, —