

Из приведенного выше описания видно, что работа алгоритма существенно зависит от выбора критериев f_1, \dots, f_n , порогов $\theta_1, \dots, \theta_n$ и последовательности $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Выбор порогов и критериев, как уже отмечалось, может быть выполнен на основе априорной информации об отличиях пиков сигнала от пиков шума, тогда как выбор $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ зависит от тонких свойств сигнала и шума в окрестности экстремумов.

При работе с описанным алгоритмом следует иметь в виду, что критерии (2) применяются не к целому пику, а к некоторой его части, поэтому для сигналов с сильно несимметричными пиками этот алгоритм может отбраковать правильный пик, ориентируясь только на его часть. Однако возможности алгоритма могут быть расширены для анализа несимметричных пиков, если анализировать вместо пары три числа (минимум, максимум, минимум), хотя подбор третьей точки к вновь возникшей паре значительно увеличивает число операций.

В заключение можно сказать, что с учетом ограничений, присущих данному алгоритму, он позволяет решать много задач поиска пиков сигнала в шумах, когда спектры сигнала и шума пересекаются по частотам и известны нелинейные ограничения на пики сигнала. На рис. 2, например, представлены итерационные шаги, сделанные программой, реализующей этот алгоритм при поиске «зубцов» на электрокардиограмме.

Автор пользуется возможностью поблагодарить профессора А. П. Мановцева за его внимание и поддержку при выполнении этой работы.

Поступила в редакцию 4 мая 1975 г.

УДК 621.317.76

В. И. БАБЕНКО

(Киев)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ СПЕКТРА ПОЛОСОВЫХ СИГНАЛОВ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) независимо от способа его реализации в цифровом [1] или дискретно-аналоговом [2] виде сводится к представлению интеграла Фурье комплексной квадратурной суммой

$$F_N(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-j\omega k\Delta t}. \quad (1)$$

В том и другом случае определение ДПФ осуществляется путем кодирования выборочных значений $f(k\Delta t)$ исследуемого сигнала $f(t)$ в моменты времени $k\Delta t$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), последующего их взвешивания по закону $\exp(-j\omega k\Delta t)$ и суммирования продуктов взвешивания.

Известно, что ДПФ при конечном шаге дискретизации Δt является оценкой аналитического спектра сигнала на частоте ω , которая определяется суммой периодических отсчетов этого спектра в точках $\omega - k2\pi/\Delta t$. Члены суммы при $k \neq 0$ определяют погрешность оценки, равную [3]

$$\Delta F(\omega) = \sum_k' F\left(\omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right),$$

где штрих в знаке суммы означает, что суммирование производится по всем k , кроме $k=0$. Уменьшение этой погрешности (погрешности дискретизации) может быть получено в результате уменьшения веса членов суммы при $k \neq 0$. Для этой цели необходимо либо увеличивать частоту дискретизации, либо применять входные фильтры, увеличивающие крутизну скатов исследуемого спектра вне рабочего диапазона частот [4]. Обычно выбор крутизны скатов частотной характеристики фильтра определяется из условия допустимой ошибки измерения модуля спектральной плотности сигнала с невозрастающим вне пределов рабочего диапазона спектром. В этом случае

$$\Delta |F(\omega)| \leq \sum_k' \left| K\left(\omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right|, \quad (2)$$

где $K(\omega)$ — частотная характеристика (ЧХ) ограничивающего фильтра.

Специфика обработки полосовых сигналов проявляется в возможности выбора частоты дискретизации не по верхней граничной частоте, а по ширине полосы частот исследуемого сигнала [5]. Эта особенность требует специального исследования связи погрешности дискретизации с частотой дискретизации исследуемого сигнала. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Предположим, что используется ограничивающий фильтр с равномерной в пределах рабочего диапазона ЧХ и крутизной ее скатов, обратно пропорциональной n -й степени частоты. Предположим также, что естественный спектр вне рабочего диапазона практически не затухает, так что максимальная погрешность дискретизации, как это следует из выражения (2), определяется формой ЧХ фильтра.

На рис. 1 условно изображена ЧХ ограничивающего фильтра в виде двух комплексно-сопряженных кривых $K(\omega)$ — для области положительных и $K^*(\omega)$ — для области отрицательных частот]:

$$\left. \begin{aligned} |K(\omega)| &= 1 && \text{при } \omega_0 - \omega \leq \left| \frac{\Delta\omega}{2} \right|; \\ |K(\omega)| &= \left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0 - \omega} \right|^n && \text{при } \omega_0 - \omega > \left| \frac{\Delta\omega}{2} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

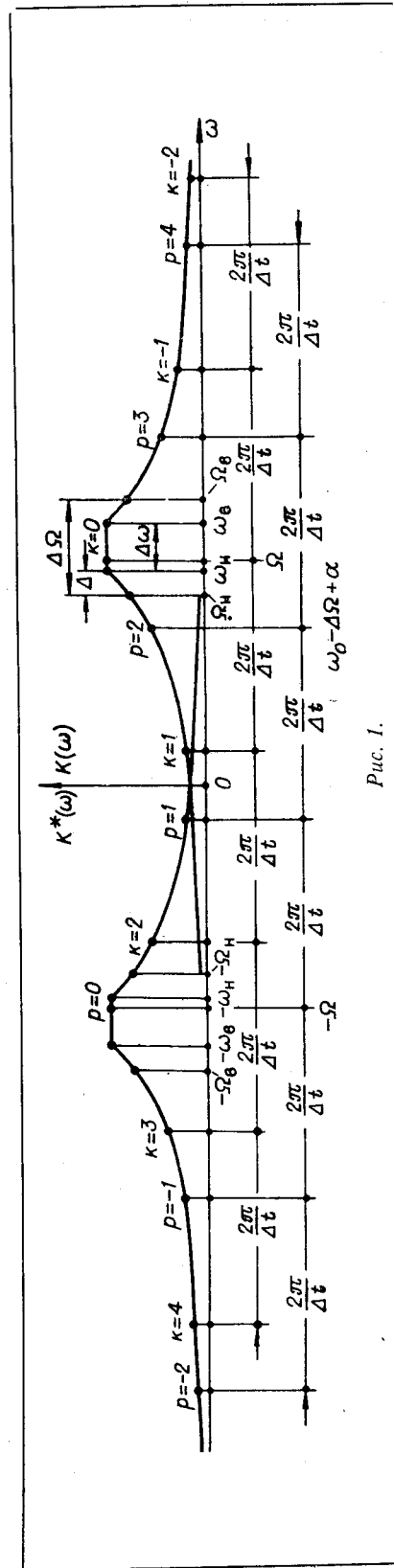


Рис. 1.

где $\Delta\omega = \omega_b - \omega_n$ — рабочая полоса частот, $\omega_0 = (\omega_b + \omega_n)/2$ — центральная частота рабочей полосы частот, n — степень затухания ЧХ фильтра. На том же рисунке показаны отсчеты, определяющие погрешность на произвольной частоте Ω , расположенной в пределах рабочего диапазона.

Критерием правильности выбора частоты дискретизации полосовых сигналов должно быть отсутствие взаимного перекрытия «лепестков» размноженного и измеряемого спектров на уровне, определяемом граничными частотами ω_n и ω_b [5]. Для произвольно заданного рабочего диапазона это условие обычно не выполняется, поэтому необходимо осуществить коррекцию граничных частот ω_n и ω_b путем их симметричного разнеса на величину Δ до значения $\Delta\Omega$ (см. рис. 1), подчиняющегося условию целочисленной кратности отношения

$$q = 2\Omega_n / 2\Delta\Omega = (\omega_n - \Delta) / (\Delta\omega + 2\Delta), \quad (4)$$

где $\Delta\Omega = \Delta\omega + 2\Delta$; $\Omega_n = \omega_n - \Delta$; $\Omega_b = \omega_b + \Delta$. Интервал коррекции Δ определяется из выражения (4)

$$\Delta = (\omega_n - q\Delta\omega) / (2q + 1) \text{ или } \Delta = [\xi / (2q + 1)] \Delta\omega, \quad (5)$$

а частота и интервал дискретизации с учетом (4) и (5) соответственно равны

$$\begin{aligned} \omega_n &= 2\Delta\Omega = 2\Delta\omega(2q + 2\xi + 1/2q + 1); \\ \Delta t &= 2\pi / 2\Delta\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

При таком выборе интервала дискретизации перекрытие «лепестков» на оговоренном уровне отсутствует.

Каждая спектральная составляющая в спектре исследуемого сигнала в области положительных частот имеет свое комплексно-сопряженное отображение в области отрицательных частот. Поэтому оценкой спектра полосового сигнала на произвольной частоте Ω (см. рис. 1) могут служить суммы вида

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\Omega) &= \Delta t \sum_k f(k\Delta t) e^{-j\Omega k\Delta t}; \\ \Phi(-\Omega) &= \Delta t \sum_p f(p\Delta t) e^{j\Omega p\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

По аналогии со случаем анализа спектра низкочастотного сигнала (2) полную погрешность дискретизации при анализе спектра полосового сигнала с учетом (7) можно определить выражением

$$\Delta |F(\Omega)| \leq \sum_k' \left| K\left(\Omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right| + \sum_p' \left| K^*\left(\Omega - p \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right|. \quad (8)$$

Так как $K(\omega)$ и $K^*(\omega)$ — комплексно-сопряженные, а составляющие погрешности при $k=p$ равны между собой, то можно перейти к суммированию отсчетов только на скатах ЧХ $K(\omega)$:

$$\begin{aligned} \Delta |F(\Omega)| \leq & |K(\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha)| + \sum_{p=-\infty}' \left| K\left(\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha - p \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right| + \\ & + \sum_{k=-\infty}' \left| K\left(\Omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha = \omega_0 - \Omega$, а $K(\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha)$ — перенесенный в область положительных частот отсчет ЧХ $K(\omega)$ при $k=2$ на скате ЧХ $K^*(\omega)$ в области отрицательных частот.

Поскольку для $\Omega \leq (\omega_n + \omega_n)/2$ отсчеты при $p > 0$, $k < 0$ всегда больше (по модулю) отсчетов при $p < 0$ и $k > 0$, неравенство (9) можно усилить:

$$\Delta |F(\Omega)| \leq 2|K(\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha)| + 2 \sum_{p=4}^{\infty} \left| K\left(\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha + p \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right| +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| K\left(\Omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right|$$

и

$$\Delta |F(\Omega)| \leq 2|K(\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha)| + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left| K\left(\Omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right) \right|, \quad (10)$$

так как $|K[\Omega + k(2\pi/\Delta t)]| > |K[\omega_0 - \Delta\Omega + \alpha + p(2\pi/\Delta t)]|$ при $k = -1$, а $p = 4$.

Если интервал дискретизации выбрать из условия (6), то погрешность на произвольной частоте Ω , как это следует из (10) с учетом (3), определится неравенством

$$\Delta |F(\Omega)| \leq \frac{2 \left| \frac{1}{2m} \right|^n}{\left| 1 - \frac{\alpha}{\Delta\Omega} \right|^n} + 4 \left| \frac{1}{4m} \right|^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{\alpha}{2\Delta\Omega} + k \right|^n}. \quad (11)$$

Здесь $\Delta\omega/\Delta\Omega = 1/m$ — коэффициент запаса или максимальная относительная расстройка. Максимальная погрешность соответствует случаю определения спектра на граничной частоте $\Omega = \omega_n$:

$$\Delta |F(\omega_n)| \leq \frac{2}{|2m - 1|^n} + 4 \left| \frac{1}{4m} \right|^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{1}{4m} + k \right|^n}. \quad (12)$$

Учитывая значение ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|q + k|^n} = \zeta(n, q),$$

где $\zeta(n, q)$ есть обобщенная дзета-функция, выражение (12) можно преобразовать к виду

$$\Delta |F(\omega_n)| \leq \frac{2}{|2m - 1|^n} + 4 \left| \frac{1}{4m} \right|^n \zeta\left(n, \frac{1}{4m}\right). \quad (13)$$

Ввиду отсутствия табулированных значений обобщенной дзета-функции при интересующих нас значениях аргумента n и q воспользуемся приближенным способом определения значения суммы из выражения (12):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{1}{4m} + k \right|^n} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\left| \frac{1}{4m} + k \right|^n} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{1}{4m} + k \right|^n}, \quad (14)$$

где вторая справа сумма представляет собой остаток ряда и определяет погрешность его оценки конечной суммой

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\left| \frac{1}{4m} + k \right|^n}.$$

Поскольку

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left|\frac{1}{4m} + k\right|^n} < \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{|k|^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^n} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{|k|^n}, \quad (15)$$

правая часть неравенства (15) есть оценка остатка ряда (14) сверху. Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^n} = \zeta(n),$$

где $\zeta(n)$ есть дзета-функция Римана, которая табулирована в работе [6], а $\sum_{k=1}^N \frac{1}{|k|^n}$ легко вычисляется, выражение для определения относительной погрешности дискретизации при анализе спектра полосовых сигналов может быть представлено в удобном для численного расчета виде

$$\delta_d = \frac{\Delta |F(\omega_H)|}{|F(\omega_H)|} \leq \frac{2}{|2m-1|^n} + 4 \frac{1}{|4m|^n} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{\left|\frac{1}{4m} + k\right|^n} + \zeta(n) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{|k|^n} \right]. \quad (16)$$

Однако пользоваться этим выражением без количественной оценки остатка ряда (14) нельзя. Задаваясь относительным значением величины

$$\gamma = \frac{\zeta(n) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{|k|^n}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\left|\frac{1}{4m} + k\right|^n}}, \quad (17)$$

где $n=2, 3, \dots, 10$, можно определить допустимое N (при допустимых пределах изменения $m=1; 1, 1, \dots, 2$), полагая, что N можно произвольно увеличивать. Исследование выражения (17) (для крайних значений m) показывает, что при $N \geq 10$ γ меньше 0,02% (для $n=2$) и уменьшается с ростом N и n (рис. 2).

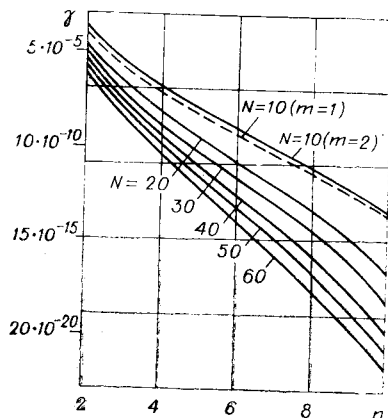


Рис. 2.

При выборе частоты дискретизации полосовых сигналов, равной частоте Найквиста [7], погрешность дискретизации δ_d на граничной частоте анализа, как показывают расчеты по выражению (16), всегда остается больше двух при любых степенях n (см. таблицу). Поэтому для уменьшения погрешности до приемлемых значений (1–10%), помимо увеличения крутизны скатов, необходимо уменьшить интервал дискретизации по сравнению с интервалом Найквиста, т. е. выбирать $\Delta t = 2\pi/(2m\Delta\Omega)$.

Следует отметить, что свободно варьировать величиной m при необходимости уменьшения Δt в случае дискретизации полосовых сигналов нельзя. Расстройка полосы анализа $\Delta\omega$ до значения $\Delta\Omega$, характеризуемая величиной m , при которой выполняется условие (4), является фиксированной. Любое изменение m , приводящее к нарушению этого условия, увеличивает погрешность, заданную выражением (16). При заданном m погрешность δ_d может быть уменьшена путем увеличения крутизны скатов ЧХ фильтра. В тех случаях, когда этого сделать не удается, а погрешность дискретизации желательнее уменьшить, необходимо удвоить значение $\Delta\Omega$.

Зависимость верхней границы δ_d от крутизны скатов ЧХ фильтра (крутизны скатов спектра), характеризуемой степенью n при различных значениях m , приведена в таблице.

n	m											
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	
2	2,29	1,62	1,21	0,939	0,749	0,612	0,509	0,43	0,368	0,318	0,278	
3	2,042	1,186	0,75	0,504	0,355	0,259	0,195	0,15	0,118	0,095	0,077	
4	2,007	0,968	0,523	0,307	0,191	0,126	0,086	0,06	0,044	0,032	0,0248	
5	2,001	0,803	0,371	0,19	0,105	0,062	0,038	0,025	0,016	0,011	0,0082	
6	2	0,669	0,265	0,119	0,058	0,031	0,017	0,01	0,006	0,004	0,0027	
7	2	0,557	0,189	0,074	0,032	0,015	0,008	0,0093	0,0024	0,0014	0,0009	
8	2	0,464	0,135	0,046	0,018	0,007	0,0036	0,0018	0,0009	0,0005	0,0003	
9	2	0,387	0,096	0,029	0,01	0,003	0,0016	0,0007	0,0003	0,00018	0,0001	
10	2	0,322	0,068	0,018	0,005	0,0019	0,0007	0,0003	0,0001	0,00006	0,00003	

Полученное соотношение (16) позволяет по известной форме ската амплитудного спектра сигнала, значению рабочей полосы $\Delta\omega$ и допустимой погрешности дискретизации δ_d определить требуемый интервал дискретизации Δt или определить требуемую крутизну скатов ЧХ полосового фильтра по известной полосе частот, интервалу дискретизации и допустимой величине погрешности.

Выполненные по изложенной методике расчеты (при $N=10$) показывают, что применение ограничивающего фильтра с крутизной скатов порядка 40 дБ на октаву ($n=7$) позволяет для сигнала с невозрастающим спектром обеспечить приемлемые (см. таблицу) значения δ_d при малых величинах коэффициента запаса m . Применение фильтров со скатами ЧХ до 60 дБ на октаву ($n=10$) позволяет при $m=1,3$ ограничить погрешность дискретизации значением 2% (см. таблицу).

Соотношение (16) можно использовать и для определения погрешности дискретизации низкочастотных сигналов. Действительно, если интервал дискретизации выбрать из условия

$$\Delta t = \pi / (m\Omega_B),$$

где Ω_B — граничная частота спектра низкочастотного сигнала, а $\omega_0 - \Omega_B = \left| \frac{\Delta\omega}{2} \right| = |\Omega_B|$, то выражение (11), первый член которого будет отсутствовать, можно записать в виде

$$\frac{\Delta |F(\Omega_B)|}{|F(\Omega_B)|} < (2m)^{-n} \zeta \left(n, -\frac{1}{2m} \right) + (2m)^{-n} \zeta \left(n, \frac{1}{2m} \right)$$

для нечетных n и

$$\frac{\Delta |F(\Omega_B)|}{|F(\Omega_B)|} < (2m)^{-n} \zeta \left(n, -\frac{1}{2m} \right) + (2m)^{-n} \zeta \left(n, \frac{1}{2m} \right) - 2$$

для четных n , что совпадает с выражениями, полученными в работе [4].

Если сравнить результаты расчетов по выражению (16) (см. таблицу) с результатами [4], то можно заметить, что значения абсолютной величины относительной погрешности дискретизации δ_d для полосовых сигналов получаются в два раза выше абсолютных значений относительной погрешности дискретизации низкочастотного сигнала. Это объясняется тем, что ЧХ полосового сигнала $K(\omega)$ в области положительных частот представляет собой эквивалент комплексной ЧХ $K^*(\omega)$ низкочастотного сигнала и, как это видно из рис. 1, составляющие погрешности при $k \neq 0$ и $p \neq 0$ в отличие от низкочастотного сигнала суммируются попарно. Поэтому, применяя данные таблицы для расчета погрешности дискретизации низкочастотных сигналов, величину δ_d необходимо уменьшить в два раза.

Пример. Пусть заданы значения граничных частот рабочей полосы $f_n = 4400$, $f_v = 5600$ Гц и полоса $\Delta f = 1200$ Гц. Применяя перед устройством дискретизации ограничивающий фильтр со спадом частотной характеристики 60 дБ на октаву, определим интервал дискретизации Δt , при котором погрешность измерения спектральных компонентов δ_d в пределах рабочей полосы не превышает 1%.

Скорректируем граничные частоты полосы для выполнения условия (4):

$$q = f_n / \Delta f = 3,66; \quad \Delta = (f_v - q\Delta f) / (q + 1) = 114,3 \text{ Гц.}$$

В выражении для расчета Δ используется целая часть q . Величина скорректированной полосы

$$\Delta\Omega = \Delta f + 2\Delta = 1428,6 \text{ Гц,}$$

а интервал дискретизации

$$\Delta t = 1 / (2\Delta\Omega) = (1/2857,2) \text{ (1/Гц).}$$

Коэффициент запаса $m = \Delta\Omega / \Delta f = 1,19$, а верхнее значение $\delta_d = 6,8\%$ (см. таблицу при $n = 10$). Поскольку по условию δ_d не должна превышать 1%, следует выбрать $m = 2$, тогда погрешность дискретизации, как видно из таблицы, становится меньше 1%. Величина интервала дискретизации уменьшается и равна

$$\Delta t = 1 / (2m\Delta\Omega) = 1 / (2 \cdot 2857,2) \text{ (1/Гц).}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch. The finite Fourier transform.— "IEEE Trans. Audio and Electroacoustics", 1969, vol. AU-17, p. 77—85.
2. В. И. Бабенко, В. И. Чайковский. Дискретно-аналоговый анализатор спектра.— «Измерительная техника», 1975, № 3, с. 86—88.
3. В. И. Чайковский, Л. Я. Яловенко. Определение спектральной плотности детерминированного сигнала по дискретной последовательности его отсчетов.— В кн.: Методы и устройства преобразования графической информации. Киев, «Наукова думка», 1968, с. 41—44.
4. В. И. Чайковский. Повышение эффективности дискретного преобразования Фурье путем предварительной фильтрации сигналов.— В кн.: Технические средства управляющих машин. Киев, Изд. Ин-та кибернетики АН УССР, 1973, с. 15—21.
5. В. И. Бабенко, В. И. Чайковский. Выбор частоты квантования и весовых коэффициентов при анализе спектра полосовых сигналов.— Сборник рефератов депонированных рукописных работ, № 13. М., Изд. НИИЭИР, 1973, с. 14—15.
6. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. М., «Наука», 1968.
7. С. Стейн, Дж. Джонс. Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений. М., «Связь», 1971.

Поступила в редакцию 13 августа 1975 г.