АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1976

МЕТОДЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 621.317.080

Ш.-С. О. АБДУЛАЕВ, В. А. ВОЛКОВ, В. В. ПИЦЫК
(Москва — Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К ТОЧНОСТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ СРЕДСТВ СЛОЖНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Пусть при проектировании некоторой измерительной системы, предназначенной для определения состояния объекта, характеризуемого вектором $Q=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$, выбран вектор измеряемых величин

$$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),\ r\geqslant m,$$

где $\alpha_i=\alpha_i(t, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$, $t\in[a, b]$, $i=1, 2, \ldots, r$. При этом выполняется однозначность соотношения

$$Q=f(\alpha)$$

(f — нелинейный оператор).

Вектор состояния Q определяется путем совместной обработки результатов измерений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, содержащих случайные ошибки. Очевидно, что вектор состояния будет определяться с некоторой конечной точностью. В системах с совместной обработкой результатов измерений точность наиболее полно характеризуется коэффициентами корреляции. Поэтому зададим требования к точности определения вектора состояния в виде корреляционной матрицы оценки $\hat{Q}$ вектора Q:

$$\hat{K}=\{K_{ij}\},\ i, j=\overline{1, m}.$$

Относительно ошибок измерений величин α_i делается предположение, что они независимы и подчинены многомерному нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и неизвестными дисперсиями $\sigma^2_{\alpha_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$.

Обработка результатов измерений будет проводиться по методу наименьших квадратов с использованием весовой матрицы ошибок измерений в виде

$$X_\alpha=\{x_{\alpha_i}\delta_{ij}\},\ i, j=\overline{1, r},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $x_{\alpha_i}=1/\sigma^2_{\alpha_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$. Ставится задача определения таких дисперсий $\tilde{\sigma}^2_{\alpha_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$, чтобы матрица X_α обеспечивала наилучшее приближение корреляционной матрицы вектора Q

$$\hat{K}=(A^{T}X_{\alpha}A)^{-1}, \tag{1}$$

где $A=(A_{ij})$, $A_{ij}=\partial\alpha_i/\partial Q_j$ $(i=1, 2, \ldots, r;\ j=1, 2, \ldots, m)$, к матрице $\overset{\circ}{K}$.

Для определения элементов матрицы K линеаризуем выражение для Q, разложив его в ряд в малой окрестности некоторой точки Q. Сохранив только члены первого порядка, получим линейные функции случайных аргументов, для которых численные характеристики известны [1]:

$$\|\hat{K}^{-1}-\overset{\circ}{K}^{-1}\|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m}[\hat{K}_{ij}^{(-1)}-\overset{\circ}{K}_{ij}^{(-1)}]^2}.$$

Тогда, согласно [2], наилучшими значениями элементов матрицы X_α являются значения $\hat{x}_{\alpha_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$, при которых достигается минимум функционала

$$\Phi=\|\hat{K}^{-1}-\overset{\circ}{K}^{-1}\|^2 \tag{2}$$

при условии $x_{\alpha_i}\geqslant 0$, $l=1, 2, \ldots, r$.

Подставляя выражение (1) в (2), получаем

$$\Phi=\|A^{T}X_{\alpha}A-\overset{\circ}{K}^{-1}\|^2. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала задачу нахождения безусловного экстремума функционала $\Phi(x)$. Для ее решения можно привлечь классические методы минимизации функции многих переменных [3].

Действительно, раскрывая выражение (3) и учитывая симметричность матриц $\hat{K}$ и $\overset{\circ}{K}$, имеем

$$\Phi(x_\alpha)=\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{m}A_{l_i}^2\right)^2 x_{\alpha_l}^2-2\sum_{\substack{l=1;\\ l\neq h}}^{r}\sum_{i,j=1}^{m}A_{h_i}A_{l_i}\overset{\circ}{H}_{ij}x_{\alpha_l}+$$
$$+2\sum_{l=1}^{r-1}\sum_{h=l+1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{m}A_{l_i}A_{h_i}\right)^2 x_{\alpha_l}x_{\alpha_h}+\sum_{i,j=1}^{m}\overset{\circ}{H}{}_{ij}^2,$$

где $\overset{\circ}{H}=\overset{\circ}{K}^{-1}$, $H=(\overset{\circ}{H}_{ij})$, $i,\ j=1, 2, \ldots, m$.

Поскольку в точке минимума функционала $\Phi=\Phi(x)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_{\alpha_l}}=0,\quad l=1,2,\ldots,r,$$

координаты этой точки находятся из системы линейных уравнений

$$\left(\sum_{i=1}^{m}A_{l_i}^2\right)^2 x_{\alpha_l}+\sum_{\substack{h=1;\\ h\neq l}}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}A_{l_i}A_{h_i}\right)^2 x_{\alpha_h}=\sum_{i,j=1}^{m}A_{l_i}A_{l_j}\overset{\circ}{H}_{ij},\quad l=1,2,\ldots,r.$$

Общее решение этой системы имеет вид [4]

$$\hat{X}_\alpha=C^{-}B+(I-C^{-}C)Z, \tag{4}$$

где C^{-} — обобщенная обратная матрица к C, Z — произвольный вектор, I — единичная матрица,

$$B = (B_l), \quad B_l = \sum_{i,j=1}^{m} A_{l_i} A_{l_j} \overset{\circ}{H}_{ij}, \quad l = 1, 2, \ldots, r.$$

При этом ранг матрицы C не выше $m(m+1)/2$. Действительно,

$$C = \{C_{ij}\} = \{D_{ij}^2\}; \quad D = \{D_{ij}\} = AA^T;$$
$$\{C_{ij}\} = \{Tr(A_i A_j^T A_j A_i^T)\} = \{Tr(A_i A_i^T A_j A_j^T)\},$$

где Tr — след матрицы. С учетом симметрии $A_i A_i^T$ и $A_j A_j^T$ после приведения подобных $C_{ij} = G_i G_j$, где элементы вектор-строки G_i сформированы из элементов $A_i A_i^T$, а элементы G_j — из элементов $A_j A_j^T$. Размерность G_i и G_j равна $m(m+1)/2$ (максимальное число различных элементов матрицы $A_i A_i^T$). В результате получаем

$$C = \{G_i G_j^T\} = GG^T,$$

где G — матрица $r \times m(m+1)/2$. Очевидно, ее ранг не выше $m(m+1)/2$. Можно привести пример, когда ранг C меньше ранга A.

Рассмотрим пример. Пусть состояние объекта в некоторый момент времени характеризуется прямоугольными координатами x, y, z, определяемыми по результатам измерений сферических координат: дальности (D), угла места (ε) и азимута (β) с началом системы координат в точке стояния измерительного средства [5]. Считая, что требования к точности определения вектора Q заданы из условия

$$\overset{\circ}{H}_{ij} = \mu\delta_{ij}, \ \mu > 0, \ i, \ j = \overline{1, m},$$

где μ — некоторая положительная постоянная, получаем

$$\hat{x}_{\alpha_D} = \mu;$$
$$\hat{x}_{\alpha_\varepsilon} = \mu\tilde{D}^2;$$
$$\hat{x}_{\alpha_\beta} = \mu\tilde{D}^2 \cos^2 \tilde{\varepsilon},$$

при которых $\Phi(\hat{x}) = 0$ и выполняется равенство $\hat{K} = \overset{\circ}{K}$.

Таким образом, в ряде случаев решение задачи оценки требований к точностным характеристикам некоторых типов измерительных средств с известным составом измеряемых величин можно получить в виде (4). Это решение справедливо при одинаковой ориентации эллипсоидов рассеяния заданных и допустимых ошибок. В общем случае необходим более жесткий критерий для решения задачи оценки требований к точностным характеристикам измерительных средств. В качестве такого критерия примем показатель точности, характеризуемый эллипсоидом рассеяния, который вписывается в требуемый (или допустимый) эллипсоид рассеяния независимо от их взаимной ориентации.

Известно, что корреляционная поверхность m-мерного вектора поправок $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ к параметрам траектории $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ представляет собой множество всех точек, являющихся проекциями эллипсоида $q^T K^{-1} q = 1$ на соответствующие направления [2], где K — корреляционная матрица вектора Q.

Пусть $\hat{\mathcal{F}}$ обозначает расчетный, а $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ — заданный эллипсоиды рассеяния ошибок определения вектора Q. Обозначим также через $\hat{F}$ и $\overset{\circ}{F}$ множество точек, содержащихся соответственно внутри эллипсоидов

$\hat{\mathcal{F}}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$. Тогда условием обеспечения требуемой точности определения вектора Q является соотношение

$$\hat{F} \subseteq \overset{\circ}{F}. \tag{5}$$

Обозначим через R множество всех векторов X, удовлетворяющих условию (5). Тогда задача определения требований к точности измерений формулируется следующим образом: найти вектор $\hat{X}$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(\hat{X}) = \min_{X \in R} \Phi(X).$$

Выпишем в явном виде условия, накладываемые на вектор X. Заметим с этой целью, что матрица $\overset{\circ}{H}$ размерности $m \times m$, являясь симметрической, приводится к диагональному виду преобразованием [6]

$$T^T \overset{\circ}{H} T = \Lambda, \tag{6}$$

где T — ортогональная матрица размерности $m \times m$; Λ — диагональная матрица размерности $m \times m$ с элементами $\lambda_1\ \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Используя (6), получаем

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}} = q^{*T} T^T \overset{\circ}{H} T q^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ii} q_i^{*T} q_i^*, \tag{7}$$

где

$$q^* = T^T q. \tag{8}$$

Геометрически преобразование (8) эквивалентно приведению эллипсоида $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ к его главным осям $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_m^*)$.

Полагая в (7)

$$q_i^* = e_i \lambda_i^{-1/2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

преобразуем поверхность $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ в гиперсферу единичного радиуса

$$\sum_{i=1}^{m} e_i^T e_i = 1.$$

Применяя последовательно (8) и (9), получаем

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{F}} = q^{*T} T^T A^T X_\alpha A T q^*; \\ \hat{\mathcal{F}}_u = e^T G^T T^T A^T X_\alpha A T G e, \end{gathered} \tag{10}$$

где G — диагональная матрица размерности $m \times m$ с элементами q_1, $q_2, \ldots, q_m; q_i = \lambda_i^{-1/2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Введем обозначение:

$$\begin{gathered} L = ATG = (L_{ij})_{i,j=1}^{m}; \\ Y = L^T X_\alpha L = (Y_{ij})_{i,j=1}^{m}. \end{gathered} \tag{10'}$$

Тогда вместо (10) имеем

$$\hat{\mathcal{F}} = e^T Y e. \tag{11}$$

Пусть

$$D = B^T Y B,$$

где B — ортогональная матрица размерности $m \times m$. Тогда в соответствии с выбранной матрицей поворота B можно записать

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_m \end{pmatrix}.$$

Здесь $d_i (i=1, 2, \ldots, m)$ — собственные значения матрицы Y. Для выполнения соотношения (5) достаточно потребовать, чтобы

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} |d_i| \geqslant 1. \tag{12}$$

Заметим, что собственные значения матрицы Y являются функциями переменных $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_r}$, т. е. $d_i = f_i(x)$. Однако определение этих функций в явном виде представляет довольно сложную задачу. Вместе с тем для выполнения неравенства (12) в соответствии с теоремой Гершгорина [7] достаточно выполнить условие

$$\left| Y_{ij} - \sum_{\substack{j=1; \\ j \neq i}}^{m} |Y_{ij}| \right| > 1. \tag{13}$$

Используя (10'), получаем систему неравенств

$$\left| \sum_{j=1}^{r} L_{ji}^2 x_{\alpha_j} - \sum_{\substack{j=1; \\ j \neq i}}^{m} \left| \sum_{k=1}^{r} L_{k_i} L_{k_j} X_{\alpha_k} \right| \right| > 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Система (14) сводится к следующей системе линейных неравенств:

$$\Omega_{ipi_0,\ldots,i_p}(x) \equiv \sum_{j=1}^{r} L_{ji}^2 x_{\alpha_j} - 1 + \sum_{\substack{j=1; \\ j \neq i}}^{m} \operatorname{sign}\left(1 - 2\sum_{l=0}^{p} \delta_{ji_l}\right) \sum_{k=1}^{r} L_{k_i} L_{k_j} x_{\alpha_k} > 0, \tag{15}$$

$i=1, 2, \ldots, m, \quad i_0=0,$

$p=0, 1, \ldots, m, \quad i_l=i_{l-1}+1, i_{l-1}+2, \ldots, m-p+l \ (l=1, 2, \ldots, p),$

где δ_{ji_l} — символ Кронекера.

Теперь задачу оценки требований к точности измерений величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ формулируем следующим образом: определить вектор $\hat{X} = (\hat{x}_{\alpha_1}, \hat{x}_{\alpha_2}, \ldots, \hat{x}_{\alpha_r})^T$, удовлетворяющий равенству

$$\Phi(\hat{x}) = \min \Phi(x) \tag{16}$$

при ограничениях

$$\Omega_{ipi_0,\ldots,i_p}(x) > 0, \tag{17}$$

$$x_{\alpha_i} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{18}$$

Пусть $\mathring{R}$ обозначает множество всех векторов X, удовлетворяющих неравенствам (17) и (18). Нетрудно видеть, что $\mathring{R} \subset R$.

Для решения задачи (16)—(18) применим алгоритм, реализующий метод внутренней точки [8]. В соответствии с этим методом строится функция

$$U(x, \rho) = \Phi(x) + S(\rho) I(x),$$

где ρ — положительное число; $I(x)$ — некоторая функция от x, непрерывная в области $\mathring{R}$ и удовлетворяющая условию: для любой бесконечной последовательности точек $\{x^k\} \in \mathring{R}$, сходящейся к x^*, при которой $\Omega_{ipi_0, \ldots, i_p}(x^*) > 0$, хотя бы для одного набора индексов $ipi_0 i_p$ $\lim\limits_{k \to \infty} I(x^k) = +\infty$; $S(\rho)$ — скалярная функция от ρ, обладающая следующими свойствами:

1) если $\rho_1 > \rho_2 > 0$, то $S(\rho_1) > S(\rho_2) > 0$;

2) если $\{\rho_k\}$ — бесконечная последовательность точек, для которой $\lim\limits_{k \to \infty} \rho_k \to 0$, то $\lim\limits_{k \to \infty} S(\rho_k) = 0$.

Поиск экстремальной точки $\hat{x}$ функции $U(x, \rho)$ начинается с выбора произвольной начальной точки $\mathring{x} \in \mathring{R}$ [8]. Далее производится переход из точки $\mathring{x}$ в следующую точку $x(\rho_1)$ при выполнении условия

$$U(x, \rho) < U(\mathring{x}, \rho_0).$$

Эта точка является некоторым приближением к экстремальной точке $\hat{x}$ функции $U(x, \rho)$ в допустимой области R. Точка $x(\rho_1)$ будет также принадлежать области $\mathring{R}$ (в противном случае принимается $U(x, \rho_1) = +\infty$). Начиная из точки $x(\rho_1)$ определяем значение функции $U(x, \rho_2)$, где $\rho_1 > \rho_2 > 0$. Затем процесс повторяется до тех пор, пока не находится минимум функции $U(x, \rho_k)$, начиная из точки $x(\rho_{k-1})$, для строго убывающей последовательности $\{\rho_k\}$.

Рассмотренный алгоритм поиска экстремума функции многих переменных при наличии ограничений достаточно просто реализуется на ЭВМ.

Предложенный способ определения требований к точностным характеристикам измерительных средств может быть использован для решения ряда системотехнических задач, таких, например, как определение структуры построения измерительных систем, выбор типов измерительных средств и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1961.
2. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.
3. Д. Дж. Уайлд. Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967.
4. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., Физматгиз, 1968.
5. Космические траекторные измерения. Под общ. ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. М., «Сов. радио», 1969.
6. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
7. М. Пароди. Локализация характеристик чисел матриц и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. Нелинейное программирование. М., «Мир», 1972.

Поступила в редакцию 2 апреля 1976 г.