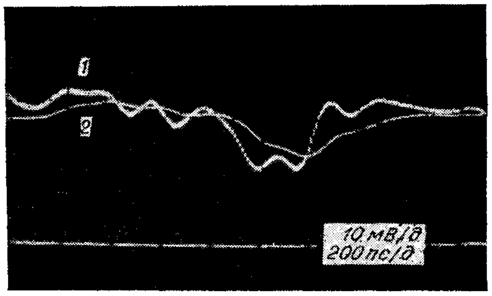
Рис. 2. Рефлектограмма двух емкостных неоднородностей ($C=0,2$ пФ) в линии передачи на расстоянии 30 мм. Верхняя осциллограмма—некорректированный сигнал, нижняя — сигнал на выходе корректора. Эффективное время развертки 0,2 нс/см, чувствительность 10 мВ/см.



корректоров аппаратных функций линейных измерителей оказывается весьма эффективным при визуальном наблюдении реакции исследуемых систем.

Основные ограничения при реализации корректоров накладываются возможностями точного измерения и моделирования аппаратной функции и прежде всего соотношением между спектрами Фурье наблюдаемых сигналов и шумов измерителя.

Проведенный эксперимент подтверждает правильность теоретических выводов и показывает возможности построения аналоговых корректоров аппаратных функций различных измерителей переходных процессов в линейных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. W o r k i n g with subnanosecond pulses.— "END", 1970, vol. 15, № 5, p. 33.
2. Р. А. П о л у э к т о в, Г. Н. С о л о п ч е н к о. Методы коррекции динамических погрешностей.— «Автометрия», 1971, № 5, с. 3—12.
3. К. Я. Ш в е ц о в. Один способ коррекции сигнала, искаженного измерительными трактами.— «Измерительная техника», 1966, № 3, с. 29—32.
4. Д. Б е н д а т. Основы теории случайных шумов и ее применение. М., «Наука», 1965.
5. И. Н. Г и х м а н, А. В. С к о р о х о д. Теория случайных процессов. Т. 1. М., «Наука», 1971.
6. Ю. А. Р я б и н и н. Стробоскопическое осциллографирование. М., «Сов. радио», 1972.

Поступило в редакцию 4 января 1973 г.;
окончательный вариант — 23 сентября 1975 г.

УДК 519.28

В. И. БОРЩЕВИЧ, И. Ф. КЛИСТОРИН

(Кишинев)

К ВОПРОСУ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С НЕИЗВЕСТНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Эффективность статистических методов, широко применяемых во многих областях измерительной техники, в сильной степени зависит от знания статистических свойств исследуемых объектов. Однако во многих случаях априорные сведения о виде закона распределения отсутствуют, и тогда приходится использовать различные методы восстановления неизвестной плотности распределения вероятностей.

Современные методы аппроксимации плотности $p(x)$ при неизвестном законе распределения связаны с использованием моделей вида [1]

$$p_n(x)=\sum^{n} a_i\varphi_i(x), \tag{1}$$

где a_i — коэффициенты разложения; $\{\varphi_i(x)\}$ — некоторый функциональный базис.

Обычный подход, основанный на минимизации меры расхождения вида

$$\rho=\rho\{p(x),\ p_n(x)\}, \tag{2}$$

затрудняет выбор допустимых базисов Ф без дополнительных предположений о свойствах $p(x)$.

В качестве одного из возможных подходов к решению поставленной задачи предлагается метод, основанный на минимизации меры вида

$$\rho = \rho\{Hp(x),\ Hp_n(x)\}, \tag{3}$$

где H — оператор, задающий преобразование

$$\psi(u) = Hp(x), \tag{4}$$

такое, что $\psi(u)$ — всегда выпуклая функция, причем существует обратный оператор H^{-1}, такой, что $HH^{-1}=1$. Это позволяет привлечь к решению хорошо разработанный аппарат теории выпуклых функций.

Рассмотрим оператор H_n, задающий преобразование

$$\psi(u) = \int_0^u F^{-1}(s)\,ds, \tag{5}$$

где $F^{-1}(s)$ — функция, обратная функции распределения $F(x)$:

$$F^{-1}(s) = \inf\{x : F(x) \geqslant s\}. \tag{6}$$

Поскольку всякая функция распределения возрастающая, то таким же свойством будет обладать и обратная ей функция, следовательно, преобразование (5) будет проектировать класс функций распределения, а через него и класс плотностей распределения в класс выпуклых функций. Кроме того, преобразование (5) обладает еще одним важным свойством: для любых чисел x_1, x_2, x_3, ..., удовлетворяющих условию

$$x_1 < x_2 < x_3,\ \ldots, \tag{7}$$

справедливо неравенство

$$u_1 < u_2 < u_3. \tag{8}$$

Иначе говоря, такая проекция сохраняет последовательность проектируемых точек.

Для аппроксимации $\psi(u)$ употребим вписанный выпуклый многогранник, представленный функцией $\psi_n(u)$, а в качестве меры расхождения — функционал

$$\rho\{Hp(x),\ Hp_n(x)\} = \int_0^1 |\psi(u) - \psi_n(u)|\,du. \tag{9}$$

Многогранник может быть получен в виде суммы треугольников с максимальной площадью, определяемых теоремой Лагранжа о конечных приращениях для выпуклых функций. Такая процедура описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned}
&u_1 : \psi(1) - \psi(0) = \frac{d\psi(u)}{du}, \quad u \in [0,\ 1];\\
&u_{10} : \frac{\psi(u_1) - \psi(0)}{u_1} = \frac{d\psi(u)}{du}, \quad u \in [0,\ u_1);\\
&u_{11} : \frac{\psi(1) - \psi(u_1)}{1 - u_1} = \frac{d\psi(u)}{du}, \quad u \in [u_1,\ 1],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{10}$$

где u_i — корни уравнений системы, записанных справа; i — индексы в двоичной системе, которые отражают двоичный характер «размножения» уравнений в системе. Количество разрядов в двоичном индексе определяет порядок корней. Легко заметить, что корни более высоких порядков определяются через корни меньших порядков.

Такому многограннику $\psi_n(u)$ с координатами вершин $(u_1,\ \psi(u_1))$, $(u_{10},\ \varphi(u_{10}))$, $(u_{11},\ \psi(u_{11}))$ ...аналитически эквивалентен сплайн первого порядка $h_n^1(u)$, который может быть дополнен членами второго порядка за счет информации, полученной из той же системы уравнений (10), и преобразован в сплайн второго порядка $h_n^2(u)$.

Обратное преобразование

$$H^{-1}h_n^2(u) = h_n^0(x) = p_n(x) \tag{11}$$

даст искомую аппроксимацию плотности распределения $p(x)$, наилучшую с точки зрения критерия (9). Узлы сплайна $h_n^0(x)$ получаем путем преобразования системы уравнений (10):

$$\mu_1 = H^{-1}u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx;$$

$$\mu_{10} = H^{-1}u_{10} = \int_{-\infty}^{\mu_1} xp(x)\,dx \left[\int_{-\infty}^{\mu_1} p(x)\,dx\right]^{-1}; \qquad (12)$$

$$\mu_{11} = H^{-1}u_{11} = \int_{\mu_1}^{+\infty} xp(x)\,dx \left[\int_{\mu_1}^{+\infty} p(x)\,dx\right]^{-1};$$

. . . .

Сплайн $h_n^0(x)$ эквивалентен другой аппроксимации:

$$h_n^0(x) = \sum^{n} a_i\chi_i(x), \qquad (13)$$

где a_i — коэффициенты разложения, определяемые из выражения

$$a_i = \int_0^1 \chi_i(x)\,p(x)\,dx; \qquad (14)$$

$\{\chi_i(x)\}$ — система ортонормированных функций типа Хаара [2]:

$$\chi_0(x) = 1, \quad x\in[0,\ 1];$$

$$\chi_1(x) = \begin{cases} +(1-\mu_1)^{+1/2}\,\mu_1^{-1/2}, & x\in[0,\ \mu_1); \\ -(1-\mu_1)^{-1/2}\,\mu_1^{+1/2}, & x\in[\mu_1,\ 1]; \end{cases}$$

. . . .

Разложение (13) обладает следующим свойством:

$$a_i = f(\mu_1, \ldots, \mu_i), \qquad (15)$$

где f — некоторая элементарная алгебраическая функция от величин μ_1, μ_{10}, ..., μ_i. Это означает, что в нашем случае знание этих чисел совершенно достаточно для аппроксимации.

Остановимся кратко на вопросе оценки чисел системы $\{\mu_i\}$ по результатам наблюдений, представленных выборкой независимых значений случайной величины $\{x_j\}_N$. Эти оценки можно получить с помощью статистик следующего вида:

$$\mu_1^* = \frac{1}{N}\sum^{n} x_j; \qquad (16)$$

$$\mu_{10}^* = \frac{1}{N_{10}}\sum^{N_{10}} x_k^{(10)}; \qquad (17)$$

$$\mu_{11}^* = \frac{1}{N_{11}}\sum^{N_{11}} x_k^{(11)}, \qquad (18)$$

где $\{x_k^{(10)}\}_{N_{10}}$ — множество элементов из $\{x_j\}_N$, принадлежащих интервалу $[0,\ \mu_1^*)$; $\{x_k^{11}\}$ — множество элементов из $\{x_j\}_N$, принадлежащих интервалу $[\mu_1^*,\ 1]$ и т. д. В работе [3] рассматриваются некоторые вопросы, связанные с аппаратурной реализацией таких оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Ченцов. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., «Наука», 1972.
2. И. М. Соболь. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М., «Наука», 1969.
3. В. И. Борщевич. Об одной системе числовых характеристик одномерных и условных законов распределения.— «Автометрия», 1975, № 2, с. 130—132.

Поступило в редакцию 7 июня 1976 г.