Дисперсия этого значения составляет

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{3(N-1)}{N(N+1)} \right]. \tag{8}$$

Предлагаемый алгоритм дает значение оценки

$$P_1(N) = \frac{1-0,5N}{0,5N^2} \sum_{i=1}^{0,5N} z_i + \frac{1,5N-1}{0,5N^2} \sum_{i=0,5N+1}^{N} z_i$$

с дисперсией

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{4(N-1)^2}{N^3} \right]. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) следует, что для $N \gg 1$ дисперсии оценок относятся как 4 : 5.

Сравнение объема вычислений показывает (для полинома первой степени), что метод наименьших квадратов требует выполнения $(N+2)$ операций умножения, а предлагаемый алгоритм — 2 операции умножения на рациональные числа. Кроме того, не требуется запоминать или рассчитывать элементы матрицы A.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Логинов. Функции Уолша и области их применения.— «Зарубеж. радиоэлектроника», 1973, № 4, с. 73.
2. Б. Т. Поляк, Ю. А. Шрейдер. Применение полиномов Уолша для приближения функций.— В кн.: Вопросы теории математических машин. Под ред. Ю. А. Базилевского. Сб. 2. М., Физматгиз, 1962.
3. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.

Поступило в радакцию 20 ноября 1974 г.;
окончательный вариант — 17 октября 1975 г.

УДК 519.24

А. М. АЗИЗОВ
(Ленинград)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОГО КЛАССА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе [1] рассмотрены некоторые вопросы статистической динамики простейших измерительных систем с распределенными параметрами. В настоящем сообщении мы ставим цель — получить точное решение краевой задачи, описывающей поведение таких систем, и учесть влияние коррелированности параметра системы с входным процессом на показания этих систем.

Пусть рассматриваемые системы описываются следующими уравнениями и краевыми условиями:

$$\frac{\partial И(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 И(x, t)}{\partial x^2} + m(t)\,[\theta_0(t) - И(x, t)]; \tag{1}$$

$$И(x, t)\,|_{x=\pm l_0} = t_c; \quad И(x, t)|_{t=0} = И_0. \tag{2}$$

В такой постановке задачи анализа измерительные системы являются нестационарными, так как параметр $m(t)$ считается функцией времени. В (1), (2) введены обозначения: $И(x, t)$ — локальная реакция измерительной системы; l_0, a, $m(t)$ — параметры системы; $\theta_0(t)$ — измеряемая характеристика исследуемого процесса; t_0, $И_0$ — постоянные величины.

Запишем краевую систему в виде

$$LV(x,\ t)=f(t); \tag{3}$$

$$V(x,\ t)\,|_{x=\pm l_0}=0; \quad V(x,\ t)|_{t=0}=И_0-t_c=V_0. \tag{4}$$

Здесь

$$V(x,\ t)=И(x,\ t)-t_c;$$

$$LV(x,\ t)=a\frac{\partial^2 V(x,\ t)}{\partial x^2}-m(t)\,V(x,\ t)-\frac{\partial V(x,\ t)}{\partial t};$$

$$f(t)=m(t)\,[t_c-\theta_0(t)].$$

Операторное уравнение (3) с краевыми условиями (4) эквивалентно интегральному тождеству [2]

$$(L\ V,\ \eta)=(f,\ \eta), \tag{5}$$

где символы $(LV,\ \eta)$ и $(f,\ \eta)$ означают скалярные произведения функций LV, η и f, η соответственно, а η — произвольная функция из области определения оператора L.

Пусть функция η удовлетворяет граничным условиям в (4), тогда после одного интегрирования по частям тождество (5) примет вид

$$a\left(V'_x,\ \eta'_x\right)+m(t)\,(V,\ \eta)+\left(V'_t,\ \eta\right)=[\theta_0(t)-t_c]\ m(t)\,(1,\ \eta). \tag{6}$$

Пусть искомая функция $V(x,\ t)$ представлена в виде

$$V(x,\ t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\,\varphi_i(x), \tag{7}$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — некоторая полная система функций. Подставив (7) в (6), получим

$$a\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\left(\varphi'_i(x),\ \eta'_x\right)+m(t)\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\,(\varphi_i(x),\ \eta)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}a'_i(t)\,(\varphi_i(x),\ \eta)=[\theta_0(t)-t_c]\ m(t)\,(1,\ \eta). \tag{8}$$

Для определения функций $a_i(t)$ в соответствии с методом Бубнова — Галеркина строим систему, взяв в качестве функции η последовательно элементы системы $\{\varphi_i(x)\}$:

$$a\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\left(\varphi'_i(x),\ \varphi'_k(x)\right)+m(t)\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\,(\varphi_i(x),\ \varphi_k(x))+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}a'_i(t)\,(\varphi_i(x),\ \varphi_k(x))=[\theta_0(t)-t_c]\,m(t)\left(1,\ \varphi_k(x)\right),\quad k=1,\ 2,\ \ldots . \tag{9}$$

Если в качестве системы $\{\varphi_i(x)\}$ взять систему ортогональных функций, производные которых также ортогональны, то вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) получим независимые уравнения для определения каждой функции $a_i(t)$.

Заметим, что в рамках нашей постановки задачи (параметры системы зависят только от времени, но не от пространственных координат) такими системами функций могут быть собственные функции соответствующих краевых задач. Во всех других случаях полученные решения будут приближенными. В нашем случае такой системой функций (ортогональных и ортогональных по производным) может служить система

$$\varphi_i(x)=\sin i\,(\pi/2l_0)\,(x+l_0),\ i=1,\ 2.\ \ldots \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получим

$$\frac{da_k(t)}{dt}+\left[a\left(\frac{k\pi}{2l_0}\right)^2+m(t)\right]a_k(t)=\frac{2}{k\pi}\,[1-(-1)^k]\ m(t)\,[\theta_0(t)-t_c]. \tag{11}$$

Начальные условия для $a_k(t)$ имеют вид

$$a_k(0)=[И_0-t_c]\,(1,\ \varphi_k)/(\varphi_k\ \varphi_k)=(2/k\pi)\,[1-(-1)^k]\,[И_0-t_c]. \tag{12}$$

Как следует из (11) и (12), коэффициенты a_k четного порядка тождественно равны нулю, т. е. для рассматриваемой задачи оказывается полной система

$$\varphi_i(x) = \sin(2i-1)/(\pi/2l_0)(x+l_0), \quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{13}$$

Таким образом, решение исходной задачи с учетом (7), (11)—(13) можно записать в виде

$$V(x,\ t) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\exp\left[-a\left(\frac{i\pi}{2l_0}\right)^2 t - \int_0^t m(\tau)\,d\tau\right]\left\{V_0 + \int_0^t m(\tau)\left[\theta_0(\tau) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - t_c\right]\exp\left[a\left(\frac{i\pi}{2l_0}\right)^2\tau + \int_0^{\tau} m(\eta)\,d\eta\right]d\tau\right\}\sin(2i-1)\frac{\pi}{2l_0}(x+l_0). \tag{14}$$

Без ограничения общности можно положить $И_0 = t_c$, т. е. $V_0 = 0$, и отсчитывать локальное значение физической величины $И(x,\ t)$ от N_0, поэтому в дальнейшем в качестве локальной реакции системы будем считать величину $V(x,\ t)$ и входной сигнал отсчитывать от $И_0$.

Обычно показания измерительной системы соответствуют некоторому функционалу от $V(x,\ t)$, взятому по пространственной координате. Чаще всего этот функционал имеет смысл среднего значения величины $V(x,\ t)$ на интервале $(-l_0,\ l_0)$:

$$W(t) = \frac{1}{2l_0}\int_{-l_0}^{l_0} V(x,\ t)\,dx.$$

Таким образом, для показаний измерительной системы имеем

$$W(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}\int_0^t m(\tau)\,\theta(\tau)\exp\left[-a\left(\frac{i\pi}{2l_0}\right)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^{t} m(\eta)\,d\eta\right]d\tau, \tag{15}$$

где $\theta(t) = \theta_0(t) - И_0$.

Перейдем к определению статистических свойств показаний измерительной системы. Осуществив над обеими частями соотношения (15) операцию математического ожидания, получим

$$\overline{W}(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}\int_0^t M\left\{m(\tau)\,\theta(\tau)\exp\left[-a\left(\frac{i\pi}{2l_0}\right)^2(t-\tau) - \mu(\tau)\right]\right\}d\tau. \tag{16}$$

Здесь M — символ операции математического ожидания; $\mu(\tau) = \int_{\tau}^{t} m(\eta)\,d\eta$; $\overline{W}(t) = M\{W(t)\}$.

Введем в рассмотрение трехмерный нормальный случайный вектор с компонентами $m(\tau)$, $\theta(\tau)$ и $\mu(\tau)$. Пусть $E(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ — характеристическая функция указанного вектора, тогда выражение для математического ожидания принимает вид

$$\overline{W}(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}\int_0^t \exp\left[-a\left(\frac{i\pi}{2l_0}\right)^2(t-\tau)\right]\left.\frac{\partial^2 E(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_2=0;\\ \lambda_3=j}} d\tau \tag{17}$$

(j — мнимая единица).

Теперь, учитывая, что характеристическая функция нормального вектора может быть выражена через элементы корреляционной матрицы $\|K_{pq}\|$ вектора и математические ожидания $\bar{y}_p$ компонент вектора посредством соотношения

$$E(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n) = \exp\left\{j\sum_{p=1}^{n}\lambda_p\bar{y}_p - \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\lambda_p\lambda_q K_{pq}\right\},$$

получим следующее выражение для математического ожидания:

$$\overline{W}(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}\int_0^t\left[K_{m\theta}(0) + \left(\overline{m} - K_{m\mu}\right)\left(\overline{\theta} - K_{\theta\mu}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-a\left(\frac{i\pi}{2l_0}\right)^2(t-\tau) + \frac{1}{2}K_{\mu\mu} - \overline{m}(t-\tau)\right]d\tau, \tag{18}$$

где $K_{m\theta} = K_{m\theta_0}$ — взаимная корреляционная функция параметра $m(t)$ и измеряемой характеристики исследуемого процесса $\theta_0(t)$;

$$K_{m\mu} = \int_{\tau}^{t} K_m(\eta-\tau)\,d\eta, \quad K_{\theta\mu} = \int_{\tau}^{t} K_{\theta_0 m}(\eta-\tau)\,d\tau, \quad K_{\mu\mu} = \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t} K_m(\eta_2-\eta_1)\,d\eta_1 d\eta_2.$$

При выводе формулы (18) случайные процессы $\theta(t)$ и $m(t)$ считались стационарными и стационарно-коррелированными.

Как следует из (18), наличие корреляции между процессами $\theta(t)$ и $m(t)$ приводит к появлению в показаниях измерительной системы дополнительной составляющей. Численное решение показывает [3], что эту составляющую необходимо учитывать при проектировании измерительных систем, предназначенных для измерений высокой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Азизов. Методическая погрешность исследования случайных коррелированных процессов.— «Измерительная техника», 1969, № 2, с. 11—14.
2. О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М., «Наука», 1973.
3. А. М. Азизов, В. А. Иванов, В. И. Лопухов, А. С. Поваренков. Вероятностный анализ измерительных систем первого порядка.— «Автометрия», 1974, № 2, с. 87—89.

Поступило в редакцию 8 июля 1974 г.;
окончательный вариант — 30 июня 1975 г

УДК 681.325

А. П. АНИСИМОВ, В. В. КОРНИЛОВ, Г. Н. КУКЛИН,
В. С. ПОРТАСОВ, Г. П. ПОТЫЛИЦИН, А. И. СЕДОВ,
В. И. ШКОРКИН

(Москва)

СИСТЕМА РЕГИСТРАЦИИ БЫСТРЫХ ПРОЦЕССОВ «ИМПУЛЬС»

Назначение. Система регистрации быстрых процессов «Импульс» предназначена для измерения и преобразования в дискретную форму сигналов быстропротекающих процессов с последующей регистрацией данных на перфоленту и ввода в ЭВМ.

Система используется для изучения быстропротекающих процессов при биофизических исследованиях, для анализа кинетики быстрых биофизических процессов, а также в других областях скоростной спектроскопии. Она применяется в научно-исследовательских лабораториях при исследовании быстропротекающих процессов. Система может работать в автономном режиме в качестве устройства сбора и кодирования информации в составе многоуровневой системы сбора и обработки данных. Благодаря использованию в системе оборудования, выполненного в стандарте САМАС, система может быть расширена и видоизменена в соответствии с потребностями эксперимента.

Состав. Блок-схема системы приведена на рисунке. В состав системы входят: экспериментальная установка (сверхскоростной спектрофотометр), запоминающий осциллограф «С8-12», видеокамера «Электроника-видео», перфоратор «ПЛ-20-2» (либо «ПЛ-80-11»), дискретный графопостроитель «РДД-1», кассетный магнитофон «Вильма-стерео», управляющий вычислительный комплекс типа УВК М-400 с интерфейсным блоком (ИБ), оборудование связи устройств системы, выполненное в стандарте САМАС.

Для системы крейт САМАС содержит следующие модули:
модуль измерения и кодирования сигнала (МИК),
модуль управления регистрацией на перфоленте (МРП),
модуль управления регистрацией на графике (МРГ),
модуль управления регистрацией на магнитной ленте (МРЛ),
модуль автономного контроллера крейта (МАК).

При регистрации на перфоленте и магнитной ленте возможен ручной ввод информации.