ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Васильев, Н. Л. Арюткина. О методе алгебраической коррекции фона в количественном анализе по спектрам поглощения.— «Заводская лаборатория», 1975, № 3.
2. D. D. Tunnicliff, R. S. Rasmussen, M. L. Morse. Correction for interfering absorption in spectrophotometric analyses.— "Anal. Chem.", 1949, vol. 21, p. 895—900.
3. А. Ф. Васильев, М. Б. Панкова. О возможности применения линейного и выпуклого программирования для количественного анализа по спектрам поглощения.— «Заводская лаборатория», 1972, № 9.
4. А. Ф. Васильев, А. А. Киселева, Г. В. Головкин, Г. А. Косминская. Количественный анализ технического дикрезила методами ИК-спектроскопии и ГЖХ.— «Заводская лаборатория», 1974, № 9.
5. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и квадратичное программирование. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
28 марта 1974 г.,
окончательный вариант —
23 января 1975 г.

УДК 621.391

А. М. ЯКУБОВИЧ

(Москва)

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ ДЛЯ ОЦЕНОК СИГНАЛОВ, МАЛОЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ К ОТКАЗАМ ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

Для оценки дискретных сигналов весьма часто используются дискретные рекуррентные фильтры (фильтры Винера — Калмана) [1]. Оптимальные по квадратичному критерию алгоритмы этих фильтров найдены в предположении об исправности источников информации. При этом сбои и отказы источников информации могут привести к значительным ошибкам в оценках сигналов. В статье находятся и исследуются алгоритмы фильтров, оценки сигналов на выходе которых в существенно меньшей степени зависят от показаний неисправных источников информации (приборов). Это достигается за счет учета вероятностных характеристик приборов в состояниях исправности и отказа, при обработке информации. Рассматриваемая задача относится к байесовским задачам оценки сигналов в случае негауссовых ошибок измерения [2].

Результаты работы могут быть использованы при создании высоконадежных информационных и управляющих систем.

Постановка задачи. Пусть производится измерение n-мерного вектора состояния $\{X_i\}$ объекта, динамические уравнения которого имеют вид

$$X_{i+1}=\Phi_{i+1,\,i}\,X_i+\xi_i, \tag{1}$$

где $i=1, 2, \ldots, k$ — номер такта измерения; $\Phi_{i+1,\,i}$ — матрица перехода размерности $n\times n$; ξ_i — n-мерный вектор дискретного белого шума с математическим ожиданием $E[\xi_i]=0$ и корреляционной матрицей $E[\xi_i\xi_j^{\mathrm{T}}]=L_{ij}\delta_{ij}$, $\delta_{ij}=0$ при $j\neq i$, $\delta_{ij}=1$ при $i=j$ (т — операция транспонирования матрицы). Вектор состояния измеряется $m\geqslant n$ приборами. Приборы в количестве $s\leqslant m$ с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_s$ могут находиться в состояниях как исправном, так и отказа. В исправном состоянии уравнения измерения имеют вид

$$Z_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s} = H_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s} X_i + \eta_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}, \tag{2}$$

где $Z_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}$ — s-мерный вектор измерения в i-м такте; $H_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}$ — матрица измерения размерности $s \times n$; $\eta_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}$ — s-мерный вектор дискретного белого шума с математическим ожиданием $E[\eta_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}]=0$ и корреляционной матрицей

$$E\left[\eta_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}\eta^{\mathrm{T}}_{l,j_1,j_2,\ldots,j_s}\right] = Q_{i,l,j_1,j_2,\ldots,j_s}\delta_{il},$$

причем $E\left[\eta_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}\xi^{\mathrm{T}}_r\right]=0$, $r=1, 2, \ldots, k$.

Отметим, что требование независимости в разных тактах шумов ξ_i, $\eta_{i,j_1,j_2,\ldots,j_s}$ может быть заменено менее жестким требованием приведения этих сигналов к белым шумам через формирующие фильтры. Тогда, согласно [3], система уравнений объекта измерения путем расширения вектора состояния приводится к виду (1), (2).

В неисправном состоянии результирующий вектор выходных сигналов приборов в i-х тактах $Z^i_{j_1,j_2,\ldots,j_s}=[Z_{1,j_1,\ldots,j_s}\ldots Z_{i,j_1,\ldots,j_s}]$ не зависит от результирующего вектора состояния в i-х тактах $X^i=[X_1,\ldots,X_i]$. Считаются известными: вероятность исправного состояния прибора с номером j_l $(l=1, 2, \ldots, s)$ в i-х тактах измерения $P^i_{j_l}$, плотность вероятности в состоянии отказа результирующего вектора сигналов $m-s$ приборов с номерами $[r_1,\ldots,r_{m-s}]$ в i-х тактах $f_H\left[Z^i_{r_1}\ldots Z^i_{r_{(m-s)}}\right]$, плотность вероятности распределения вектора состояния в первом такте измерения $f_1(X_1)$. Ставится задача: определить оценку $\hat{Y}_{i/k}$ вектора состояния X_i в i-м такте на основании измерений в k-х тактах по среднеквадратичному критерию

$$\inf_{\hat{Y}_{i/k}} E\left[(\hat{Y}_{i/k}-X_i)^{\mathrm{T}}(Y^{\mathrm{T}}_{i/k}-X_i)\right].$$

Вывод выражения для оценки. Искомая оценка в соответствии с [3] может быть найдена по формуле

$$\hat{Y}_{i/k} = \frac{\int X_i f(Z^k/X^k) f(X^k)\,dX^k}{\int f(Z^k/X^k) f(X^k)\,dX^k}. \tag{3}$$

Здесь $f(Z^k/X^k)$ — условная плотность вероятности вектора Z^k при фиксированном значении реализации вектора X^k, $f(X^k)$ — плотность вероятности вектора X^k.

Найдем выражения для $f(X^k)$, $f(Z^k/X^k)$. Учитывая независимость ξ_i, ξ_l $(l \neq i)$ между собой, получим

$$f(X^k) = f_1(X_1)\prod_{i=1}^{k-1} f(X_{i+1}/X_i), \tag{4}$$

где $f(X_{i+1}/X_i)$ — условная плотность вероятности X_{i+1} при фиксированном значении X_i. Но, согласно уравнению (1),

$$f(X_{i+1}/X_i) = f_{\xi_i}(\xi_i = X_{i+1} - \Phi_{i+1,i}X_i), \tag{5}$$

где $f_{\xi_i}(\xi_i)$ — плотность вероятности ξ_i.

Подставив (5) в (4), получим

$$f(X^k) = f(X_1)\prod_{i-1}^{k-1} f_{\xi_i}(\xi_i = X_{i+1} - \Phi_{i+1,i}X_i). \tag{6}$$

Определим, далее, $f(Z^k/X^k)$. При исправных s приборах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_s$ условная плотность вероятности равна плотности вероятности ошибки $\eta^k_{j_1,j_2,\ldots,j_s}$, т. е.

$$f\left(Z_{j_1,\ldots,j_s}/X^k\right) = f_{\eta^k_{j_1,\ldots,j_s}}\left(\eta^k_{j_1,\ldots,j_s}\right). \tag{7}$$

Учитывая, что $\eta_{i_1,j_1,\ldots,j_s}$ и $\eta_{l,j_1,\ldots,j_s}$ при $l \neq i$ независимы по условию, получим

$$f_{\eta^k_{j_1,\ldots,j_s}}\left(\eta^k_{j_1,\ldots,j_s}\right) = \prod_{i=1}^{k} f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}\right), \tag{8}$$

а

$$f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}/X^k\right) = \prod_{i=1}^{k} f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(\eta_{i,j_1,\ldots,j_s} = Z_{i,j_1,\ldots,j_s} - H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right). \tag{9}$$

При неисправных $m-s$ приборах с номерами $r_1, \ldots, r_{m-s}$

$$f\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}/X^k\right) = f_H\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}\right), \tag{10}$$

поскольку при отказе показания не зависят от X^k. Пусть s приборов с номерами $j_1, \ldots, j_s$ исправны, а остальные $m-s$ с номерами $r_1, \ldots, r_{m-s}$ отказали. Тогда из (9), (10) получим

$$f(Z^k/X^k) = f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}/X^k\right) f_H\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} f_{\eta\, i,j_1,\ldots,j_s}\left(Z_{i,j_1,\ldots,j_s} - H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right) f_H\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}\right).$$

Вероятность события, состоящего в исправности указанных s приборов и отказе остальных $m-s$ приборов в k-х тактах, равна $P^k_{j_1,\ldots,j_s;r_1,\ldots,r_{m-s}}$.

Суммируя условные плотности вероятности сигналов комбинаций исправных и неисправных приборов с учетом вероятности событий, имеем

$$f(Z^k/X^k) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{j_1=1}^{m} \ldots \sum_{j_s=s}^{m} P_{j_1,\ldots,j_s,r_1,\ldots,r_{m-s}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(Z_{i,j_1,\ldots,j_s} - H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right) f_H\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}\right),$$

$$j_1 < j_2 < \ldots j_s. \tag{11}$$

В случае независимых отказов приборов

$$P^k_{j_1,\ldots,j_s,r_1,\ldots,r_{m-s}} = \prod_{l=1}^{s} P^k_{j_l} \prod_{b=1}^{m-s}\left(1 - P^k_{r_b}\right), \quad r_b \neq j_l, \tag{12}$$

и

$$f(Z^k/X^k) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{j_1=1}^{m} \ldots \sum_{j_s=s}^{m} \prod_{l=1}^{s} P^k_{j_l} \prod_{b=1}^{m-s}\left(1 - P^k_{r_b}\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(Z_{i_1,j_1,\ldots,j_s} - H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right) f_H\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}\right),$$

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_s;\ r_b \neq j_l.$$

Обозначим

$$f_H\left(Z^k_{r_1,\ldots,r_{m-s}}\right) P^k_{j_1,\ldots,j_s;r_1,\ldots,r_{m-s}} = F^k_{j_1,\ldots,j_s}. \tag{13}$$

Подставляя $f(X^k)$, $f(Z^k_i/X^k)$ из (6) и (11) в (3), с учетом (13) получим

$$\widehat{Y}_{i/k}=\frac{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{j_1=1}^{m}\cdots\sum\limits_{j_s=s}^{m}F^k_{j_1,\ldots,j_s}\int X_i\prod\limits_{i=1}^{k}f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(Z_{i,j_1,\ldots,j_s}-\right.}{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{j_1=1}^{m}\cdots\sum\limits_{j_s=s}^{m}F^k_{j_1,\ldots,j_s}\int\prod\limits_{i=1}^{k}f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(Z_{i,j_1,\ldots,j_s}-\right.}\rightarrow\ldots$$

$$\rightarrow\ldots\frac{\left.-H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right)\prod\limits_{i=1}^{k-1}f_{\xi_i}\left(X_{i+1}-\Phi_{i+1,i}X_i\right)f_1(X_1)\,dX^k}{\left.-H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right)\prod\limits_{i=1}^{k-1}f_{\xi_i}\left(X_{i+1}-\Phi_{i+1,i}X_i\right)f_1(X_1)\,dX^k},\ j_1<j_2<\ldots<j_s. \tag{14}$$

В формуле (14)

$$\int\prod_{i=1}^{k}f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(Z_{i,j_1,\ldots,j_s}-H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right)\prod_{i=1}^{k-1}f_{\xi_i}\left(X_{i+1}-\Phi_{i+1,i}X_i\right)f(X_1)\,dX^k=$$
$$=f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right) \tag{15}$$

— плотность вероятности $Z^k_{j_1,\ldots,j_s}$ в предположении, что приборы с номерами $j_1,\ldots,j_s$ исправны. Интегралы в числителе формулы (14)

$$\int X_i\prod_{i=1}^{k}f_{\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}}\left(Z_{i,j_1,\ldots,j_s}-H_{i,j_1,\ldots,j_s}X_i\right)\prod_{i=1}^{k-1}f_{\xi_i}\left(X_{i+1}-\Phi_{i+1,i}X_i\right)\times$$
$$\times f_1(X_1)\,dX^k=\int X_i f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s},X^k\right)dX^k,$$

где $f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s},X^k\right)$ — совместная плотность вероятности $Z^k_{j_1,\ldots,j_s}$ и X^k с учетом того, что приборы с номерами $j_1,\ldots,j_s$ исправны. Но тогда

$$f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)\int X_i\frac{f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}X^k\right)}{f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)}dX^k=f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)\int X_i f\left(X_i/Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)\times$$
$$\times dX^k=f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)E\left[X_i/Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right]. \tag{16}$$

Здесь $f\left(X^k/Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)$, $E\left[X_i/Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right]$ — соответственно условная плотность вероятности X^k и условное математическое ожидание X_i при фиксированном значении реализации $Z^k_{j_1,\ldots,j_s}$.

Условное математическое ожидание представляет оптимальную частную оценку по среднеквадратичному критерию [3] (обозначаемую $\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s}$) в предположении об исправности приборов с номерами $j_1,\ldots,j_s$. С учетом формул (15), (16) выражение для $\widehat{Y}_{i/k}$ перепишется в виде

$$\widehat{Y}_{i/k}=\frac{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{j_1=1}^{m}\cdots\sum\limits_{j_s=s}^{m}F^k_{j_1,\ldots,j_s}f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s}}{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{j_1=1}^{m}\cdots\sum\limits_{j_s=s}^{m}F^k_{j_1,\ldots,j_s}f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)},$$
$$j_1<j_2<\ldots<j_s. \tag{17}$$

Формула (17) справедлива для задач сглаживания ($i<k$) и фильтрации ($i=k$). Используя результаты [4], можно показать, что формула

(17) справедлива для задачи предсказания. Учитывая, что шумы ξ_i и $\eta_{i,j_1,\ldots,j_s}$ имеют нормальное распределение, можно вычислить $f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)$ по методике, аналогичной приведенной в [4, 5]. В результате вычислений получим

$$f\left(Z^k_{j_1,\ldots,j_s}\right)=\frac{f_1\left(\widehat{X}_{1/k,j_1,\ldots,j_s}\right)}{(\sqrt{2\pi})^{ks}\sqrt{\left|D^k_{j_1,\ldots,j_s}\right|}}T^k_{j_1,\ldots,j_s}N^k_{j_1,\ldots,j_s}, \tag{18}$$

где $\left|D^k_{j_1,\ldots,j_s}\right|$ — определитель корреляционной матрицы $Z^k_{j_1,\ldots,j_s}$, обозначаемой $D^k_{j_1,\ldots,j_s}$;

$$T^k_{j_1,\ldots,j_s}=\exp-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k-1}\left(\widehat{X}_{i+1/k,j_1,\ldots,j_s}-\Phi_{i+1,i}\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s}\right)^{\mathrm{T}}\times\right.$$

$$\left.\times L^{-1}_{i+1,i}\left(\widehat{X}_{i+1/k,j_1,\ldots,j_s}-\Phi_{i+1,i}\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s}\right)\right]; \tag{19}$$

$$N^k_{j_1,\ldots,j_s}=\exp-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}\Delta Z^{\mathrm{T}}_{i,j_1,\ldots,j_s}Q_{ii,j_1,\ldots,j_s}\Delta Z_{ij_1,\ldots,j_s}\right]; \tag{20}$$

$$\Delta Z_{i,j_1,\ldots,j_s}=Z_{i,j_1,\ldots,j_s}-H_{i,j_1,\ldots,j_s}\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s} \tag{21}$$

— s-мерный вектор разности между результатами измерений и оценками. Подставив (18)—(21) в (17) и обозначив далее весовой коэффициент при $\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s}$

$$\lambda^{(k)}_{j_1,\ldots,j_s}=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{ks}}\frac{1}{\sqrt{\left|D^k_{j_1,\ldots,j_s}\right|}}F^k_{j_1,\ldots,j_s}f_1\left(\widehat{X}_{1/k,j_1,\ldots,j_s}\right)T^k_{j_1,\ldots,j_s}N^k_{j_1,\ldots,j_s}}{\sum\limits_{b=0}^{m}\sum\limits_{j_1=1}^{m}\cdots\sum\limits_{j_b=b}^{m}F^k_{j_1,\ldots,j_b}f_1\left(\widehat{X}_{1/k,j_1,\ldots,j_b}\right)T^k_{j_1,\ldots,j_b}N^k_{j_1,\ldots,j_b}}, \tag{22}$$

получим

$$\widehat{Y}_{i/k}=\sum_{s=0}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}\cdots\sum_{j_s=s}^{m}\lambda^k_{j_1,\ldots,j_s}\widehat{X}_{i/k,j_1,\ldots,j_s},\quad j_1<j_2<\ldots<j_s. \tag{23}$$

Отметим, что если нет информации о плотности вероятности $f_1(X_1)$, то можно считать $f_1(X_1)$ представляющей предел последовательности симметричных расплывающихся распределений с дисперсиями компонентов, стремящимися к ∞. Тогда, согласно [2], формула для $\widehat{Y}_{i/k}$ и все последующие формулы не будут зависеть от $f_1(X_1)$, и, следовательно, в выражении для весового коэффициента $\lambda^k_{j_1,\ldots,j_s}$ плотность вероятности $f_1(X_1)$ будет отсутствовать.

Из формулы (23) следует, что искомая оценка $\widehat{Y}_{i/k}$ представляет взвешенную сумму частных оценок, формируемых из различных сочетаний показаний приборов, принимаемых за исправные. Весовые коэффициенты $\lambda^k_{j_1,\ldots,j_s}$ определяют относительную степень исправности приборов с номерами $j_1, \ldots, j_s$ на основании априорной информации и информации, получаемой при измерении. Весовой коэффициент тем выше, чем больше вероятность исправности данной комбинации $\left(P^k_{j_1,\ldots,j_s,r_1,\ldots,r_{m-s}}\right)$, чем ближе между собой расположены показания в тактах, чем в больоценки $\widehat{X}_{i/k}$ в [3, 6] найдены рекуррентные формулы.

Для задачи сглаживания они имеют вид

$$\widehat{X}_{i/k}=\widehat{X}_{i/i}+A_{i/k}\ (\widehat{X}_{i+1/k}-\Phi_{i+1/i}\widehat{X}_{i/i}),$$

где $A_{i/k}$ — матрица весовых коэффициентов.

Для задачи предсказания

$$\widehat{X}_{k+1/k}=\Phi_{k+1,\,k}\,\widehat{X}_{k/k}.$$

Для задачи фильтрации

$$\widehat{X}_{k/k}=\Phi_{k/k-1}\widehat{X}_{k-1/k-1}+A_{k/k}(Z_k-H_k\Phi_{k,\,k-1}\widehat{X}_{k-1/k-1}), \tag{24}$$

где

$$A_{k/k}=C_{k/k}H_k^{\mathrm{T}}Q_{k/k}^{-1}\ldots \tag{25}$$

и

$$C_{k/k}=\left[C_{k/k-1}^{-1}+H_k^{\mathrm{T}}Q_{k/k}^{-1}H_k\right]^{-1}\ldots \tag{26}$$

— корреляционная матрица ошибки в k-м такте,

$$C_{k/k-1}=\Phi_{k/k-1}C_{k-1/k-1}\Phi_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+L_{k,k} \tag{27}$$

— корреляционная матрица ошибки предсказания оценки в k-м такте.

Рассмотрим подробнее задачу фильтрации. Подставив (24) в (22) для $i=k$, получим

$$\widehat{Y}_{k/k}=\widehat{Y}_{k/k-1}+\Delta Y_{k/k}, \tag{28}$$

где

$$\widehat{Y}_{k/k-1}=\Phi_{k,k-1}\sum_{s=0}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}\ldots\sum_{j_s=1}^{m}\lambda_{j_1,\ldots,j_s}^{k}\widehat{X}_{k-1/k-1,j_1,\ldots,j_s},\ j_1<j_2<\ldots<j_s, \tag{29}$$

— прогнозируемое значение оценки

$$\Delta\widehat{Y}_{k/k}=\sum_{s=0}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}\ldots\sum_{j_s=s}^{m}\lambda_{j_1,\ldots,j_s}^{k}A_{k/k,j_1,\ldots,j_s}\Big(Z_{k,j_1,\ldots,j_s}-$$
$$-H_{k,j_1,\ldots,j_s}\Phi_{k,k-1}\widehat{X}_{k-1/k-1,j_1,\ldots,j_s}\Big),\ j_1<j_2<\ldots<j_s, \tag{30}$$

— уточнение оценки по результатам замеров в k-м такте. Весовые коэффициенты $\lambda_{j_1,\ldots,j_s}^{k}$ в общем случае не могут быть вычислены рекуррентно. Однако сомножители, входящие в слагаемые числителя и знаменателя выражения для $\lambda_{j_1,\ldots,j_s}^{k}$, в ряде случаев точно или приближенно могут быть определены рекуррентно. Например, рекуррентно вычисляются $P_{j_l}^{k}$, если изменение вероятности безотказной работы по времени соответствует экспоненциальному закону. Сомножители $T_{j_1,\ldots,j_s}^{k}$, $N_{j_1,\ldots,j_s}^{k}$ могут быть найдены приближенно рекуррентно, если при их вычислении вместо $\widehat{X}_{i/k}$ использовать $\widehat{X}_{i/i}$. Отметим, что, кроме представления $f\left(Z_{j_1,\ldots,j_s}^{k}\right)$ в виде (18), возможно другое (вычисляемое рекуррентно), основанное на формуле

$$f(Z^k)=\prod_{i=2}^{k}f(Z_i/Z^{i-1})f(Z_1), \tag{31}$$

где $f(Z_i/Z^{i-1})$ — условная плотность вероятности Z_i при фиксированном значении вектора Z^{i-1} (индексы приборов для простоты здесь и далее опущены).

Рассмотрим $f(Z_i/Z^{i-1})$. Учитывая гауссов характер сигналов, имеем

$$f(Z_i/Z^{i-1})=\frac{B_i}{\sqrt{|D[Z_i/Z^{i-1}]|}}\exp-\frac{1}{2}\{[Z_i-E(Z_i/Z^{i-1})]^{\mathrm{T}}\times$$

$$\times D^{-1}[Z_i/Z^{i-1}][Z_i-E(Z_i/Z^{i-1})]\}. \quad (32)$$

Здесь B_i — нормирующий множитель, если Z_i есть s-мерный вектор: $B_i=(2\pi)^{\frac{s}{2}}$, $E(Z_i/Z^{i-1})$, $D(Z_i/Z^{i-1})$ — условное математическое ожидание и дисперсия Z_i при фиксированном значении вектора Z^{i-1}. Но из [6] известно, что

$$E(Z_i/Z^{i-1})=H_i\Phi_{i,\,i-1}\hat{X}_{i-1/i-1}; \quad (33)$$

$$D(Z_i/Z^{i-1})=H_iC_{i/i-1}H_i^{\mathrm{T}}+Q_{i,i}. \quad (34)$$

Подставляя (32)—(34) в (31), получим

$$f(Z^k)=f(Z_1)\prod_{i=2}^{k}\frac{B_i}{\sqrt{|H_iC_{i/i-1}H_i^{\mathrm{T}}+Q_{ii}|}}\exp-\frac{1}{2}\{(Z_i-$$

$$-H_i\Phi_{i,i-1}\hat{X}_{i-1/i-1})^{\mathrm{T}}\left(H_iC_{i,i-1}H_i^{\mathrm{T}}+Q_i\right)^{-1}(Z_i-H_i\Phi_{i,i-1}\hat{X}_{i-1/i-1})\} \quad (35)$$

или

$$f(Z^k)=f(Z^{k-1})\frac{B_k}{\sqrt{|H_kC_{k/k-1}H_k^{\mathrm{T}}+Q_{kk}|}}\exp-\frac{1}{2}\{(Z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1/k-1})^{\mathrm{T}}\times$$

$$\times\left(H_kC_{k-1/k-1}H_k^{\mathrm{T}}+Q_{kk}\right)^{-1}(Z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1/k-1})\}. \quad (35')$$

Из (35′) следует, что плотность вероятности $f(Z^k)$ может быть вычислена рекуррентно. Определитель $|D^k|$ также может быть вычислен рекуррентно по формуле

$$|D^k|=|D^{k-1}|\,|H_kC_{k/k-1}H_k^{\mathrm{T}}+Q_{kk}|. \quad (36)$$

Корреляционная матрица ошибки оценки. Корреляционная матрица $\Gamma_{\tilde{Y}_{k/k}}$ ошибки $\tilde{Y}_{k/k}=\hat{Y}_{k/k}-X_k$ оценки в k-м такте определяется выражением

$$\Gamma_{\tilde{Y}_{k/k}}=E\left[(\hat{Y}_{k/k}-X_k)(\hat{Y}_{k/k}-X_k)^{\mathrm{T}}\right]. \quad (37)$$

Нахождение $\Gamma_{\tilde{Y}_{k/k}}$ по формуле (37) представляет большие математические трудности, поскольку $\lambda^k_{j_1,\ldots,j_s}$ являются сложными функциями Z^k. Однако может быть определена нижняя грань $\Gamma_{\tilde{Y}_{k/k}}-\left(\Gamma_{\tilde{Y}_{k/k}}\right)_{\inf}$, которая может быть получена из следующих соображений. Наименьшие погрешности будут в том случае, когда оценки будут формироваться только из показаний исправных приборов в k-х тактах. Корреляционная матрица ошибки, получаемая с использованием показаний s исправных приборов с номерами $j_1,\ldots,j_s$, равна $C_{k/k,j_1,\ldots,j_s}$. Вероятность исправности этой комбинации s приборов из общего количества m равна $P^k_{j_1,\ldots,j_s,r_1,\ldots,r_{m-s}}$. Суммируя корреляционные матрицы с учетом вероятностей исправности комбинаций приборов, получим

$$\left(\Gamma_{\tilde{Y}_{k/k}}\right)_{\inf}=\sum_{s=0}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}\cdots\sum_{j_s=s}^{m}P^k_{j_1,\ldots,j_s,r_1,\ldots,r_{m-s}}C_{k/k,j_1,\ldots,j_s},\quad j_1<j_2<\ldots<j_s. \quad (38)$$

В качестве другой оценки ошибки может быть использована условная корреляционная матрица X_k при фиксированном значении реализации $Z^k - \Gamma_{X_k/Z^k}$, определяющая рассеяние X_k относительно $E(X_k/Z^k) = \widehat{Y}_{k/k}$, которая может быть найдена в виде

$$\Gamma_{X_k/Z^k} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_s=s}^{m} \lambda^k_{j_1 \ldots j_s} C_{k/k, j_1, \ldots, j_s}, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_s. \tag{39}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример. Пусть $m=2$, $n=1$, уравнение объекта измерения $X_k = \Phi X_{k-1} + \xi_k$, матричное уравнение измерения

$$\begin{vmatrix} Z_{k1} \\ Z_{k2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \end{vmatrix} X_k + \begin{vmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{vmatrix},$$

где $H = \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \end{vmatrix} = H_k$; η_{k1}, η_{k2} — независимые между собой белые гауссовы последовательности с одинаковыми дисперсиями D_k. Считаем последовательности сигналов при отказах независимыми. В соответствии с (23) имеем

$$\widehat{Y}_{k/k} = \lambda^k_{12} \widehat{X}_{k/k,1,2} + \sum_{i=0}^{2} \lambda^k_i \widehat{X}_{k/k,i},$$

где

$$\widehat{X}_{k/k,0} = E(X_k); \ \lambda^k_{12} = \frac{R^k_{12}}{R^k}; \ \lambda^k_i = \frac{R^k_i}{R^k}; \ R^k = R^k_{12} + \sum_{i=0}^{r} R^k_i;$$

$$R^k_0 = (1 - P^k_1)(1 - P^k_2) f_H(Z^k_1) f_H(Z^k_2);$$

$$R^k_{12} = \frac{P^k_1 P^k_2 T^k_{12} N^k_{12} f_1(\widehat{X}_{1/k,12})}{\sqrt{|D^k_{12}|}\,(2\pi)^k} = f(Z^k_{12}) P^k_1 P^k_2;$$

$$R^k_i = \frac{P^k_i (1 - P^k_j) T^k_{1i} f_1(\hat{X}_{1/k,i})}{\sqrt{|D^k_i|}\,(2\pi)^{\frac{k}{2}}} = f(Z^k_i) P^k_i (1 - P^k_j), \qquad j \neq i;$$

$$\widehat{X}_{k/k,12} = \Phi \widehat{X}_{k-1/k-1,12} + A_{k/k,12} \left[\begin{vmatrix} Z_{k1} \\ Z_{k2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \end{vmatrix} \Phi \widehat{X}_{k-1/k-1,12} \right];$$

$$\hat{X}_{k/k,i} = \Phi \hat{X}_{k-1/k-1,i} + A_{k/k,i} [Z_{k,i} - h_i \Phi \hat{X}_{k-1/k-1,i}].$$

Рассмотрим возможность рекуррентного вычисления сомножителей слагаемых, входящих в λ^k. Пусть вероятность безотказной работы изменяется во времени по экспоненциальному закону, последовательности сигналов при отказах представляют марковские цепи первого порядка, а при вычислении T^k, N^k, $f(\widehat{X}_{1/k})$ можно заменить $\widehat{X}_{i/k}$ на $\widehat{X}_{i/i}$. Тогда

$$P^k_i = P^{k-1}_i e^{-\mu_i \tau_k}; \quad T^k_{12} \approx T_{k/k-1,12} T^{k-1}_{12}; \quad T^k_i \approx T_{k/k \ \ 1,i} T^{k-1}_i;$$

$$N^k_{12} \approx N_{k/k-1,12} N^{k-1}_{12}; \quad f_1(\widehat{X}_{1/k,12}) \approx f(\widehat{X}_{1/1,2}); \quad f_1(\widehat{X}_{1/k,i}) \approx f(\widehat{X}_{1/1,i});$$

$$f_H(Z^k_i) = f_H(Z^{k-1}_i) f_H(Z_{k,i}/Z_{k-1,i});$$

$$T_{k/k-1,k} = \exp - \frac{1}{2D_{\xi_{k-1}}} (\widehat{X}_{k/k,12} - \Phi \widehat{X}_{k-1/k-1,12})^2;$$

$$T_{k/k-1,i} = \exp - \frac{1}{2D_{\xi_{k-1}}} (\widehat{X}_{k/k,i} - \Phi \widehat{X}_{k-1/k-1,i})^2,$$

где μ_i — коэффициент интенсивности отказа прибора с номером i, T_k — время между k—1 и k-ми тактами, $D_{\xi_{k-1}}$ — дисперсия ξ_{k-1},

$$N_{k/k-1,12} = \exp - \frac{1}{2} \Delta Z^{\mathrm{T}}_{k,12} Q^{-1}_{k/k-1,12} \Delta Z_{k,12}$$

$$|Z_{k2}| \quad |h_2|$$

$f_H(Z_{k,i}/Z_{k-1,i})$ — условная плотность вероятности Z_{ki} при известном значении реализации $Z_{k-1,i}$.

По формулам (35′), (26), (27) получим для $f(Z^k)$ выражения:

$$f(Z^k_{12}) = f(Z^{k-1}_{12}) \left\{ \frac{1}{2\pi \sqrt{D_k \left[C_{k/k-1,12}\left(h_1^2 + h_2^2\right) + D_k\right]}} \times \right.$$

$$\left. \times \exp - \frac{1}{2} \Delta Z^{\mathrm{T}}_{k,12} W_{k,12} \Delta Z_{k,12} \right\};$$

$$f(Z^k_i) = f_i(Z^{k-1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{C_{k/k-1,i}h_i^2 + D_k}} \times$$

$$\times \left[\exp - \frac{1}{2} \frac{\left(Z_{k,i} - h_i \Phi \widehat{X}_{k-1/k-1,i}\right)^2}{C_{k/k-1,i}h_i^2 + D_k} \right],$$

где

$$W_{k,12} = \left[H_{12} C_{k/k-1,12} H^{\mathrm{T}}_{12} + Q_{k,12}\right]^{-1} = \frac{1}{D_k \left[C_{k/k-1,12}\left(h_1^2 + h_2^2\right) + D_k\right]} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} C_{k/k-1,12}h_1^2 + D_k, & -C_{k/k-1,12}h_1h_2 \\ -C_{k/k-1,12}h_1h_2, & C_{k/k-1,12}h_2^2 + D_k \end{vmatrix};$$

$$C_{k/k-1,12} = \Phi^2 C_{k-1/k-1,12} + D_{\xi_k}; \quad C_{k/k-1,i} = \Phi^2 C_{k-1/k-1,i} + D_{\xi_k};$$

$$C_{k/k,12} = \frac{D_k \left[\Phi^2 C_{k/k-1,12} + D_{\xi_k}\left(h_1^2 + h_2^2\right)\right]}{D_k + \left(h_1^2 + h_2^2\right)\left(\Phi^2 C_{k/k-1,12} + D_{\xi_k}\right)};$$

$$C_{k/k,i} = \frac{D_k \left[\Phi^2 C_{k/k-1,i} + D_{\xi_k} h_i^2\right]}{D_k + h_i^2\left(\Phi^2 C_{k/k-1,i} + D_{\xi_k}\right)}.$$

ВЫВОДЫ

1. Найдены алгоритмы дискретных фильтров (аналогов фильтра Винера — Калмана) с пониженной чувствительностью к отказам источников сигналов для задач сглаживания, фильтрации, предсказания.

2. Оценки сигналов представляют взвешенную сумму частных рекуррентных оценок, формируемых из показаний различных совокупностей приборов.

3. Весовые коэффициенты, определяемые на основании априорной информации и информации, получаемой в процессе измерения, характеризуют степень исправности данной комбинации приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. E. Kalman. New approach to linear filtering and prediction problems.— "Trans. ASME Basic Eng.", March 1960.
2. Ю. А. Кочетков, В. К. Томшин. Оптимальная оценка искомой величины в случае негауссовых ошибок измерения.— «Техн. кибернетика», 1968, № 5.
3. М. Аоки. Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971.
4. А. М. Якубович. Экстраполяция случайного процесса, измеряемого несколькими приборами с учетом надежности их работы.— «Техн. кибернетика», 1971, № 4.
5. В. С. Пугачев. Теория случайных процессов. М., «Энергия», 1963.
6. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управления. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
4 января 1974 г.;
окончательный вариант —
3 июля 1975 г.

УДК 62-50

В. И. МИЗЮКОВ, К. К. ПАЩЕНКО,
В. В. СОКОЛОВСКИЙ, В. А. СТАНОВОВА
(Караганда)

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Значительным шагом на пути создания общей теории систем является, как известно, метод пространства состояний, позволяющий с единых позиций рассматривать линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные системы, хотя решение нестационарных и нелинейных задач остается по-прежнему трудным [1, 2]. Основной математический аппарат метода пространства состояний — векторно-матричная алгебра в линейных конечномерных пространствах с введением операции «векторного дифференцирования» [2]. Несмотря на то что понятие «состояния» системы, действительно, универсально и плодотворно для всех систем, математический аппарат метода пространства состояний адекватен в основном описанию (в полной и в меньшей мере анализу) линейных стационарных многомерных систем. При математическом моделировании и анализе нестационарных систем, описании и анализе функций качества и в ряде других прикладных задач традиционный аппарат метода пространства состояний уже для описания требует таких искусственных конструкций, как блочные матрицы, составные векторы, обобщенный обратный матричный оператор и т. п., не наглядных и не удобных при исследовании систем с помощью ЭВМ.

Эти затруднения иллюстрируются на примере идентификации линейной стационарной системы, описанной в соответствии с [3] системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}=Ax+Bv;\ y=Hx, \tag{1}$$

где A, B, H — постоянные матрицы, y — вектор измерений, v — вектор управлений, x — вектор состояний.

Требуется идентифицировать матрицу A по результатам измерений y. Разработанные векторные итеративные градиентные процедуры идентификации имеют вид

$$c[n]=c[n-1]-\gamma[n]\nabla_c I[n-1], \tag{2}$$