УДК 681.3.142

В. М. ЕФИМОВ, А. Л. РЕЗНИК

(*Новосибирск*)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НА ЭВМ ОБЪЕМОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задача вычисления объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n-мерном пространстве, очевидным образом связана с рядом интересных практических приложений. Получить удобные аналитические выражения для объема как функции размерности пространства n и параметров ограничивающих плоскостей не удается. Такие формулы могут быть выведены при фиксированном значении n, однако вычисления связаны с рутинной работой, объем которой резко возрастает при увеличении размерности пространства, так как при этом часто возникает необходимость сведения n-кратных интегралов к большому числу повторных с последующими громоздкими вычислениями. Ниже излагается аналитический метод решения, ориентированный на использование ЭВМ.

Эта работа стимулировалась изучением следующей модели.

Имеется выборка объема n из равномерного распределения на отрезке $[0, L]$. Найти вероятность события, состоящего в том, что внутри отрезка не существует интервала длины $\varepsilon(0<\varepsilon<L)$, содержащего более K $(K\leqslant n)$ элементов выборки. В такой постановке задача является математической моделью процесса непрерывного считывания изображений дискретной структуры при K пороговых уровнях [1]. Решение сформулированной задачи в виде полинома n-й степени от ε известно лишь для некоторых частных случаев. Например, для $K=1$ и $0<\varepsilon<L/(n-1)$ оно представлено в виде [2]

$$P=(L-(n-1)\varepsilon)^n/L^n.$$

Кроме того, при $\varepsilon/L\ll n$ в [1] получены асимптотические формулы.

Вообще говоря, форма общего решения в виде n-кратного интеграла такова:

$$P=n!\int\limits_D \dots \int dx_1 \dots dx_n, \tag{1}$$

где область D представляет собой объем, «вырезаемый» из n-мерного куба $(0\leqslant x_i\leqslant L,\ i=1, \dots, n)$ системой линейных неравенств

$$\begin{cases} 0<x_1<x_2<\dots<x_n<L; \\ x_{k+1}-x_1-\varepsilon>0; \\ x_{k+2}-x_2-\varepsilon>0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n-x_{n-k}-\varepsilon>0. \end{cases} \tag{2}$$

Но такое выражение для вероятности не дает возможности проведения различного рода оценок по ε, k, L. Выходом из этой ситуации может служить сведение имеющегося кратного интеграла к сумме повторных, чтобы на следующем этапе провести аналитическое интегрирование, в результате которого получить полиномиальное выражение от ε. Для этого в ЭВМ вводятся значения n и k, по которым насчитывается матрица, соответствующая системе (2). Отрезок $[0, L]$ заменяется отрезком $[0, 1]$.

Алгоритм базируется на эквивалентности интеграла (1) интегралу

$$P = n! \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \varphi_D(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{3}$$

где $\varphi_D(x_1, \ldots, x_n) = 1$, если точка $(x_1, \ldots, x_n)$ лежит внутри области D, и $\varphi_D(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если точка $(x_1, \ldots, x_n)$ лежит вне ее. Очевидно, что

$$\varphi_D(x_1, \ldots, x_n) = 1[x_1]\left(\prod_{m=2}^{n} 1[x_m - x_{m-1}]\right) 1[L - x_n]\left(\prod_{m=1}^{n-k} 1[x_{m+k} - x_m - \varepsilon]\right). \tag{4}$$

Здесь

$$1[Z] = \begin{cases} 1 & \text{при } Z > 0; \\ 0 & \text{при } Z \leqslant 0. \end{cases}$$

Аналитическое вычисление на ЭВМ интеграла (1) основывается на следующем равенстве:

$$\left(\prod_{j=1}^{l} 1[x_r - \alpha_j]\right)\left(\prod_{i=1}^{m} 1[\beta_i - x_r]\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} 1[x_r - \alpha_j]\, 1[\beta_i - x_r] \times$$
$$\times \left\{1[\beta_i - \alpha_j]\left(\prod_{\substack{q=1;\\ q\neq j}}^{l} 1[\alpha_j - \alpha_q]\right)\left(\prod_{\substack{s=1;\\ s\neq i}}^{m} 1[\beta_q - \beta_i]\right)\right\}. \tag{5}$$

Здесь α_j и β_i (а следовательно, и выражение в фигурных скобках) не содержат переменной x_r.

Для определения пределов интегрирования по переменной x_1 выделим из (4) все единичные функции, содержащие эту переменную:

$$\varphi_D(x_1, \ldots, x_n) = 1[x_1]\, 1[x_2 - x_1]\, 1[x_{k+1} - \varepsilon - x_1] \times$$
$$\times \left\{\left(\prod_{m=3}^{n} 1[x_m - x_{m-1}]\right) 1[L - x_n]\left(\prod_{m=2}^{n-k} 1[x_{m+k} - \varepsilon - x_m]\right)\right\}.$$

Тогда, учитывая (5),

$$\varphi_D(x_1, \ldots, x_n) = 1[x_1]\, 1[x_2 - x_1]\{1[x_{k+1} - \varepsilon - x_2]\, 1[x_2] \times$$
$$\times \left(\prod_{m=3}^{n} 1[x_m - x_{m-1}]\right) 1[L - x_n]\left(\prod_{m=2}^{n-k} 1[x_{m+k} - \varepsilon - x_m]\right)\Bigg\} +$$
$$+ 1[x_1]\, 1[x_{k+1} - \varepsilon - x_1]\{1[x_2 + \varepsilon - x_{k+1}]\, 1[x_{k+1} - \varepsilon] \times$$
$$\times \left(\prod_{m=3}^{n} 1[x_m - x_{m-1}]\right) 1[L - x_n]\left(\prod_{m=2}^{n-k} 1[x_{m+k} - \varepsilon - x_m]\right)\Bigg\}. \tag{6}$$

Запись (6) соответствует разделению области интегрирования на две непересекающиеся подобласти. В первой подобласти [первое слагаемое (6)] интегрирование по x_1 ведется в пределах от 0 до x_2, во второй подобласти [второе слагаемое (6)].— в пределах от 0 до $x_{k+1}-\varepsilon$.

В результате последовательного применения описанной операции исходный интеграл по области D разбивается на сумму повторных с соответствующими пределами интегрирования, т. е. выражение для $\varphi_D(x_1, \ldots, x_n)$ приводится к виду

$$\varphi_D(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j 1[\varepsilon - \gamma_j]\, 1[\delta_j - \varepsilon]\left(\prod_{i=1}^{n} 1[x_i - \alpha_{ij}]\, 1[\beta_{ij} - x_i]\right). \tag{7}$$

В процессе преобразования исходного соотношения (4) к сумме (7) в ЭВМ одновременно с определением пределов интегрирования ведется исключение избыточных неравенств и проверка получающихся систем неравенств на совместность. Сумма (7) содержит также указание на границы ε, за пределами которых соответствующие повторные интегралы следует положить равными нулю.

На следующем этапе работает программа, ведущая аналитическое интегрирование с одновременным приведением подобных членов. Эта же процедура объединяет получающиеся результаты в соответствии с границами изменения ε. После того, как вычислены все повторные интегралы, результат работы машины поступает на печатающее устройство. В приложении в качестве примера приведены результаты работы ЭВМ М-4030 для $n=4$, $k=1, 2, 3$.

Программы, реализующие данный алгоритм, фактически позволяют решать более сложную задачу, когда область D описывается следующей системой неравенств с одним свободным параметром:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j\varepsilon > 0, \qquad j = 1, \ldots, M. \tag{8}$$

Здесь a_{ij} и b_j — числовые коэффициенты системы, которые, наряду с параметрами n и M, являются исходными данными для программы аналитических вычислений.

Следует отметить, что при небольших доработках исходные алгоритмы могут быть модернизированы для вычисления объемных интегралов по области (8), когда подынтегральная функция является полиномом от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Одна из возможных модификаций заключается также в увеличении числа свободных параметров типа ε в исходной системе (8).

Все необходимые процедуры написаны на языке ФОРТРАН, и расчеты по ним проведены на ЭВМ «Минск-32» и М-4030 в ИАиЭ СО АН СССР.

Авторы благодарны канд. техн. наук А. Н. Гинзбургу и З. А. Лившицу за полезные обсуждения и внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
PROBLEM IS BEING SOLVED FOR THE NEXT CONDITIONS:
                    N=4      K=1
INTERVAL FOR EPSILON IS:                    (0.00, 1.00)
0.00<EPS<0.33
S=      1
      —12(EPS)** 1
        54(EPS)** 2
     —108(EPS)** 3
        81(EPS)** 4

PROBLEM IS BEING SOLVED FOR THE NEXT CONDITIONS;
                    N=4  K=2
INTERVAL FOR EPSILON IS:                    (0.00, 1.00)
0.50<EPS<1.00
S=      2
      —8(EPS)** 1
       12(EPS)** 2
```

```
    —8(EPS)** 3
      2(EPS)** 4

0.00<EPS<0.50

S=      1
    —12(EPS)** 2
      24(EPS)** 3
    —14(EPS)** 4
```

PROBLEM IS BEING SOLVED FOR THE NEXT CONDITIONS:

N=4 K=3

INTERVAL FOR EPSILON IS: (0.00, 1.00)

```
0.00<EPS<1.00

S=      1
    —4(EPS)** 3
      3(EPS)** 4
```

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Ефимов, А. М. Искольдский, З. А. Лившиц, Ю. М. Крендель. О характеристиках различных методов считывания изображений дискретных структур.— «Автометрия», 1973, № 1.
2. Уилкс. Математическая статистика. М., «Мир», 1966.

Поступила в редакцию 31 июля 1975 г.

УДК 52.262

А. А. АНИСТРАТЕНКО, Э. Л. АФРАЙМОВИЧ,
Б. О. ВУГМЕЙСТЕР, В. А. КОРОЛЕВ
(*Иркутск*)

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА РЕГИСТРАЦИИ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ

Радиозондирование на декаметровых волнах — в настоящее время наиболее распространенное средство исследования ионосферы. В общем виде обработка рассеянного средой (ионосферой) сигнала состоит в получении количественных характеристик, описывающих частотно-пространственно-временные свойства поля сигнала и его поляризацию. Регистрируемая информация представляет собой многоканальную запись амплитуды и фазы прошедшей через ионосферу радиоволны, и обработка ее не мыслима без применения системы АНИ.

Датчиками созданной в СибИЗМИР системы являются: 1) приемная система для регистрации амплитуды сигнала при вертикальном зондировании — установка «Зонд» [1] (3 канала); 2) приемная система для регистрации поля сигнала при вертикальном зондировании — установка «Угол» [2] (3 канала); 3) приемная система для регистрации амплитуды сигнала при вертикальном и слабонаклонном зондировании — установка «Контур» [1] (64 канала); 4) приемная система для регистрации поля сигнала при наклонном зондировании (8 каналов).

Запись выходных сигналов приемных устройств производится в цифровом виде на магнитную ленту специализированными магнитофонами М-64 и АМЗ-20.