$\varphi-\varphi^0$)). Тогда выражения (6б) и (9) упрощаются и принимают вид:

$$m=\exp(-\lambda S); \tag{12а}$$

$$R_{T_\alpha}(\tau)=\exp(-2\lambda S)\{\exp[\lambda H(\tau)]-1\}, \tag{12б}$$

где $H(\tau)=\arccos\frac{\tau}{2r}-\frac{\tau}{2r}\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{2r}\right)^2}$, $0\leqslant\tau\leqslant 2r$.

Соответствие модели свойствам реального фотографического шума проверялось расчетом спектров Винера как функций параметров модели и сопоставлением теоретических и экспериментальных данных [10].

Спектр вычислялся преобразованием Ганкеля корреляционной функции (12б). Расчеты выполнялись на ЭВМ БЭСМ-6. Для заданных значений оптических плотностей $D=\lg\frac{1}{T}=\lambda S\lg e$ изменением диаметра зерна достигалось приближение расчетных кривых к экспериментальным. Такой порядок действий связан с тем, что точная экспериментальная оценка среднего диаметра зерен металлического серебра затруднительна. Соответствие модели эксперименту оценивалось по близости хода спектральных кривых во всем диапазоне изменения пространственных частот. Полученные результаты показаны на рис. 3. Можно сделать вывод, что принятая модель позволяет теоретически описать данные экспериментальных измерений спектров Винера фотографических шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Сергеев, Д. А. Янутш. Статистические методы исследования природных объектов. Л., Гидрометеоиздат, 1973.
2. Ю. А. Мулламаа, М. А. Сулев, В. К. Пылдмаа, Х. А. Охвриль, Х. Ю. Нийлиск, М. И. Ялленов, Л. Г. Чубаков, А. Е. Кууск. Стохастическая структура полей облачности и радиации. Тарту, Изд. Ин-та физ. и астроном. АН ЭССР, 1972.
3. С. С. Кутателадзе. Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
4. Ю. Н. Гороховский. Классификация структурных свойств фотографических слоев.— «УНФ», 1951, т. 1.
5. К. К. Деньщиков. Метод имитации ИК-фонов облачного неба для исследования помехозащищенности оптико-электронных САР.— «Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение», 1969, т. 12, № 10.
6. М. Х. Резник. Обнаружение точечного излучателя в присутствии фоновых помех негауссовского типа.— «Оптико-мех. пром-сть», 1972, № 3.
7. F. T. S. Yu. Film-Grain Noise and Signal-to-Noise Ratio.— "Optik", 1972, Bd 36, H. 4.
8. С. Карлин. Основы теории случайных процессов. М., «Мир», 1971.
9. В. Ф. Захаренков, Р. П. Филимонов, В. А. Павлючук. Измерение спектров Винера фотографических шумов.— «Оптико-мех. пром-сть», 1973, № 2.
10. Ю. Н. Гороховский, Р. П. Филимонов. Некоторые результаты измерения спектров Винера фотографических шумов. — «Оптико-мех. пром-сть», 1973, № 10.

Поступила в редакцию 8 июля 1974 г.,
окончательный вариант — 28 февраля 1975 г.

УДК 62-50

А. М. АЗИЗОВ, А. Г. КУРИЦЫН

(*Ленинград*)

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вопросы представления случайных процессов имеют большое значение в задачах управления, при моделировании на ЭВМ динамики систем, параметры и входные воздействия которых являются случайными процессами.

В данной статье обсуждаются некоторые известные представления случайных процессов, а также предлагаются новые методы получения таких представлений как для стационарных, так и для нестационарных случайных процессов.

Об одном способе построения канонического разложения случайного процесса. При моделировании случайных процессов часто обращаются к каноническому разложению, которое имеет вид *

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k x_k(t), \tag{1}$$

где V_k — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями (в общем случае можно не требовать равенства единице дисперсий величин V_k, но это не играет существенной роли).

Для корреляционной функции процесса $X(t)$ имеем

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)\, x_k(t'). \tag{2}$$

Как показано в [1], представление (1) можно строить, исходя из разложения (2) корреляционной функции, положив

$$V_k = F^{(k)}[X(t) - m_x(t)], \tag{3}$$

где $\{F^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — система линейных функционалов, удовлетворяющая условию биортогональности

$$F^{(j)} x_k(t) = \delta_{jk} \tag{4}$$

или, так как из (4) и (2) следует

$$x_k(t) = F_{t'}^{(k)} K_x(t, t'), \tag{5}$$

условию

$$F_t^{(j)} F_{t'}^{(k)} K_x(t, t') = \delta_{jk}. \tag{6}$$

Фундаментальное исследование круга вопросов, связанных с каноническим представлением, имеется в [1]. Здесь мы изложим еще один способ получения разложения (2) для корреляционной функции, основывающийся на теории позитивных ядер [2].

Пусть корреляционная функция $K_x(t, t')$ непрерывна в квадрате $a \leqslant t,\ t' \leqslant b$. Рассмотрим систему функций ограниченной вариации $\{p_i\ (t)\}_{i=1}^{\infty}$, заданных на интервале (a, b), и определим по ним функции $\Phi_i(t)$ и числа a_{ij}:

$$\Phi_i(t) = \int_a^b K_x(t, t')\, dp_i(t'); \tag{7}$$

$$a_{ij} = \int_a^b \Phi_i(t)\, dp_j(t). \tag{8}$$

Будем предполагать, что все определители

$$\Delta_n = |a_{ij}|_{i,j=1}^{n} \tag{9}$$

отличны от нуля, а система $\{p_i(t)\}$ полна на (a, b) в том смысле, что

* Здесь и в дальнейшем все случайные величины и функции считаем вещественными.

если $f(t)$ непрерывна на (a, b) и для любого $i=1, 2\ldots$

$$\int_a^b f(t)\,dp_i(t) = 0, \tag{10}$$

то $f(t)$ тождественно равна нулю на (a, b).

Тогда в соответствии с [2] $K_x(t, t')$ можно представить в виде разложения (2), где

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\Phi_1(t);$$

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}} \left|\begin{matrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \ldots\ldots & a_{k-1,k} \\ \Phi_1(t) & \ldots\ldots & \Phi_k(t) \end{matrix}\right|_{k=2,3,\ldots} . \tag{11}$$

При этом ряд (2) будет сходиться равномерно по двум переменным.

Таким образом, если ограничиться рамками корреляционной теории (что часто оказывается вполне достаточным), то для получения искомого представления (1) случайного процесса достаточно вычислить интегралы (7), (8) и определители (9), (11); однако для точного решения задачи представления случайного процесса в виде ряда (1) необходимо соответствующим образом определить случайные величины V_k. Для этого разложим определитель в (11) по элементам последней строки, это дает

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}} \sum_{i=1}^{k} A_i^{(k)}\Phi_i(t), \tag{12}$$

где $A_i^{(k)}$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов.

Учитывая выражение (7), имеем

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}} \int_a^b K_x(t, t') \sum_{i=1}^{k} A_i^{(k)}\,dp_i(t'). \tag{13}$$

Наконец, сравнивая (13) с (5) и (3), для случайных величин V_k получим

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{k-1}\Delta_k}} \int_a^b [X(t) - m_x(t)] \sum_{i=1}^{k} A_i^{(k)}\,dp_i(t). \tag{14}$$

О неканонических моделях случайных процессов. Общим недостатком всех канонических разложений является необходимость иметь довольно большое количество случайных величин V_k для того, чтобы получить достаточно хорошее приближение моделируемого случайного процесса.

В случае когда требуется построить представление случайного процесса, точное лишь в рамках корреляционной теории, может оказаться удобным обратиться к неканоническому представлению, в котором число исходных случайных величин можно сделать конечным и не очень большим.

Положим, в частности,

$$X(t) = m_x(t) + \varphi(t, \Lambda), \tag{15}$$

где $m_x(t)$ — заданная функция (математическое ожидание моделируемого процесса); Λ — случайная величина, плотность вероятности которой будем обозначать $f(\lambda)$; $\varphi(t, \lambda)$ — некоторая функция.

Для того чтобы математическое ожидание процесса $X(t)$, определяемого (15), было равно заданному, требуется, очевидно, выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \lambda) f(\lambda) d\lambda = 0. \tag{16}$$

Корреляционная функция процесса $X(t)$ запишется в виде

$$K_x(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \lambda) \varphi(t', \lambda) f(\lambda) d\lambda. \tag{17}$$

Если функция $K_x(t, t')$ задана, то задача сводится к нахождению функции $\varphi(t, \lambda)$, удовлетворяющей условиям (16) и (17).

Укажем один из возможных способов подхода к отысканию таких функций.

Пусть $K_x(t, t')$ определена на квадрате $a \leqslant t$, $t' \leqslant b$. Рассмотрим систему функций $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, полную в $L_2(a, b)$, и представим $\varphi(t, \lambda)$ в форме ряда

$$\varphi(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda) x_k(t). \tag{18}$$

Тогда условие (16) запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_k(\lambda) f(\lambda) = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

а (17) — в виде

$$K_x(t, t') = \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_j(\lambda) a_k(\lambda) f(\lambda) d\lambda x_j(t) x_k(t'),$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_j(\lambda) a_k(\lambda) f(\lambda) d\lambda = a_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где a_{ij} — коэффициенты разложения $K_x(t, t')$ в ряд:

$$K_x(t, t') = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk} x_j(t) x_k(t'). \tag{21}$$

Обозначив $a_0(\lambda) = 1$, $a_{0k} = a_{k0} = \delta_{k0}$, условия (19) и (20) можно объединить, записав

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_j(\lambda) a_k(\lambda) f(\lambda) d\lambda = a_{jk}; \quad j, k = 0, 1, \ldots. \tag{22}$$

Выбор функций, удовлетворяющих условиям (22), можно произвести с помощью процедуры, аналогичной процессу ортогонализации, взяв за основу произвольную бесконечную систему функций. Таким образом можно получить всевозможные неканонические представления вида (15), точные в рамках корреляционной теории.

Если в качестве системы $\{x_k(t)\}$ взять систему, соответствующую каноническому разложению (1), то, сравнивая (2) и (21), получим, что $a_{jk} = \delta_{jk}$ и условия (22) превращаются в условия ортонормированности системы $\{a_k(\lambda)\}$ с весом $f(\lambda)$. Сами функции $a_k(\lambda)$ при этом играют роль случайных величин V_k.

Преимуществом данного неканонического представления по сравнению с каноническим служит присутствие лишь одной случайной величины. Недостатком является то, что оно, как и каноническое, по существу, оказывается приближенным даже в рамках корреляционной теории, поскольку на практике всегда приходится ограничиваться конечным числом членов ряда.

Свободно от этого недостатка предлагаемое ниже неканоническое представление стационарного случайного процесса, являющееся обобщением известного представления В. И. Чернецкого [3].

Неканоническое представление стационарного случайного процесса в замкнутой форме. Положим

$$X(t) = g(\Omega)(\sin \Omega t + \Lambda \cos \Omega t), \tag{23}$$

где Λ и Ω — независимые случайные величины, причем $m_\lambda = 0$, $\sigma_\lambda = 1$.

Обозначая плотность распределения случайной величины Ω через $f(\omega)$, получим

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \sin \omega t f(\omega)\, d\omega.$$

Предположим, что функции $g(\omega)$ и $f(\omega)$ — четные (последнее, между прочим, влечет за собой, что $m_\omega = 0$). Тогда $M[X(t)] = 0$. Далее

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] = M\{[g(\Omega)]^2 \cos \Omega(t - t')\}. \tag{24}$$

Отсюда следует, что $X(t)$, определяемая (23), есть стационарная в широком смысле случайная функция. Положив $K_x(t, t') = K_x(t' - t)$, запишем, согласно (24),

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(\omega)]^2 \cos \omega\tau f(\omega)\, d\omega$$

или с учетом четности $g(\omega)$ и $f(\omega)$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(\omega)]^2 f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \tag{25}$$

откуда

$$[g(\omega)]^2 f(\omega) = S_x(\omega), \tag{26}$$

где $S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ — спектральная плотность процесса $X(t)$.

Таким образом, если требуется получить случайную функцию с заданным математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(\tau)$, то в качестве таковой можно взять

$$X(t) = m_x(t) + g(\Omega)(\sin \Omega t + \Lambda \cos \Omega t), \tag{27}$$

где Λ и Ω удовлетворяют указанным условиям, а

$$g(\omega) = \left[\frac{S_x(\omega)}{f(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Заметим, что в силу условия (26) $f(\omega)$ может обращаться в нуль лишь одновременно с $S_x(\omega)$.

Формула (27) дает представление стационарной случайной функции, точное в рамках корреляционной теории. Если положить $g(\omega) = \sigma_x$, получим неканоническое представление В. И. Чернецкого [3]. Однако, как известно, в этом случае закон распределения случайной величины Ω уже не может быть произвольным, а должен определяться условием $f(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\sigma_x^2}$. Необходимость генерирования случайной величины Ω, закон распределения которой зависит от вида корреляционной функции моделируемого случайного процесса, существенно усложняет задачи моделирования, в которых требуется создание нескольких случайных процессов с различными корреляционными функциями. Кроме того, для случайных процессов, корреляционные функции которых имеют сложную структуру, законы распределения соответствующих случайных величин также оказываются сложными. Датчики же псевдослучайных чисел на ЭВМ обычно позволяют непосредственно получать величины, распределенные равномерно либо нормально. Переход к величинам с другими законами распределения значительно увеличивает машинное время [4].

При создании с помощью ЭВМ стационарных случайных процессов на основе предлагаемого неканонического представления (27) закон распределения случайной величины Ω может быть выбран в большой степени произвольно и независимо от корреляционных функций моделируемых процессов.

Приведем примеры. Пусть Ω — нормально распределенная случайная величина с дисперсией σ_ω^2, т. е.

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\sigma_\omega^2}\right).$$

Если необходимо получить представление (27) процесса с корреляционной функцией вида

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\beta\tau,$$

т. е.

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \tag{29}$$

то функция $g(\omega)$ должна иметь вид

$$g(\omega) = \sigma_x \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha\sigma_\omega(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \exp\left(\frac{\omega^2}{4\sigma_\omega^2}\right). \tag{30}$$

В представлении (27) случайного процесса с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

т. е.

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \tag{31}$$

функция $g(\omega)$ определится выражением

$$g(\omega) = \sigma_x \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)\sigma_\omega}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \exp\left(\frac{\omega^2}{4\sigma_\omega^2}\right). \tag{32}$$

Если в рассмотренных случаях использовать упомянутое представление В. И. Чернецкого, то при этом придется генерировать случайную величину Ω, плотность распределения которой $f(\omega)$ с точностью до множителя σ_x^2 определяется правой частью (29) или (31). Это, очевидно, требует большего машинного времени, чем введение функции $g(\omega)$, определяемой (30) или (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
2. М. Д. Дольберг. О разложении позитивного ядра в билинейный ряд.— «ДАН», 1958, т. 120, № 5.
3. В. И. Чернецкий. Анализ точности нелинейных систем управления. М., «Машиностроение», 1968.
4. В. В. Быков. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., «Сов. радио», 1971.

Поступила в редакцию 11 ноября 1974 г., окончательный вариант — 12 февраля 1975 г.

УДК 538:56:519.25

В. В. ИЗОХ, А. В. СЕРГЕЕВ

(*Минск*)

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ, ЗАДАННЫХ НА ПОЛУСФЕРЕ

Использование ЭВМ открывает новые возможности перед акустической и СВЧ-голографией. Как показано в [1], фиксация волновых полей на сферической поверхности позволяет сократить количество отсчетов по сравнению с заданием отсчетов в точках плоскости при условии получения одинаковой разрешающей способности в случае, если величина угловой апертуры превосходит θ_R. В связи с этим полезно оценить погрешность интерполяции функций, заданных на полусфере.

Пусть волновое поле, фиксируемое на полусфере радиуса ρ и описываемое функцией $F_\rho(\theta, \varphi)$, известно в конечном числе точек полусферы, координаты которых задаются, согласно [1], следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi_{ni}^{j} &= \operatorname{arctg}\frac{y_{ni}^{j}}{x_{ni}^{j}} \quad \text{при } 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\\
\varphi_{ni}^{j} &= \pi-\operatorname{arctg}\frac{y_{ni}^{j}}{x_{ni}^{j}} \quad \text{при } \frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi;\\
\varphi_{ni}^{j} &= \pi+\operatorname{arctg}\frac{y_{ni}^{j}}{x_{ni}^{j}} \quad \text{при } \pi<\varphi\leqslant\frac{3}{2}\pi;\\
\varphi_{ni}^{j} &= 2\pi-\operatorname{arctg}\frac{y_{ni}^{j}}{x_{ni}^{j}} \quad \text{при } \frac{3\pi}{2}<\varphi\leqslant 2\pi.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_{ni}^{j}, y_{ni}^{j} — проекции на оси X и Y точки дискретизации, лежащей на стороне n-го правильного шестиугольника, через которую проходит окружность радиуса r_i^n; j — порядковый номер точек, лежащих на r_i^n, отсчитываемый от полярной оси и принимающий значения $1\div 6$ или $1\div 12$ в зависимости от величины r_i^n;

$$\theta_{ni} = \arcsin\sqrt{\frac{n^2+(i-1)^2-n(i-1)}{N^2}}, \tag{2}$$