УДК 681.335

Ю. В. БУХАРЦЕВ, А. Е. ЗВЕРЕВ

(*Москва*)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЕМКОСТИ В ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЕМКОСТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В работе рассмотрены физический и геометрический подходы к задаче синтеза емкостных преобразователей, введен оператор емкости и сформулированы его свойства.

На базе вариационной формулы для емкостного функционала в зависимости от вариации границ преобразователя предложен метод приближенного решения задачи проектирования.

Полученные результаты могут быть использованы при практических расчетах емкостных преобразователей.

Пусть G — двусвязная область z-плоскости, $\gamma=\gamma_0+\gamma_1$ — ее полная граница. Будем предполагать, что γ_0 и γ_1 — простые жордановы кривые, непересекающиеся, достаточно гладкие, причем γ_0 охватывает γ_1.

Емкость $C(\gamma_0, \gamma_1)$ области G вводится формулой

$$C(\gamma_0, \gamma_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}\frac{\partial\omega(s)}{\partial n}dS,$$

где $\omega(z, \gamma_1, G)$ — гармоническая мера кривой γ_1 относительно области G [1], а $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали.

Если теперь считать, что γ_0 и γ_1 звездны относительно некоторого полюса 0, то, введя в плоскости z полярную систему координат $\{\rho, \varphi\}$ с этим полюсом, мы можем записать уравнения γ_0 и γ_1 в виде $\gamma_0:\rho=u_0(\varphi)$; $\gamma_1:\rho=u_1(\varphi)$.

Предположим, что $\max\limits_{[0,2\pi]} u_1(\varphi)<\min\limits_{[0,2\pi]} u_0(\varphi)$.

При этом условии возникает возможность жесткого вращения контура γ_1 относительно точки 0. Если θ — угол поворота γ_1, то можно определить оператор емкости $\hat{C}[u_0(\varphi), u_1(\varphi), \theta]$, зависящий от двух аргументов u_0 и u_1.

Задача синтеза емкостного преобразователя перемещения заключается в нахождении таких u_0 и u_1, что выполняется соотношение

$$\hat{C}[u_0(\varphi), u_1(\varphi), \theta]=C(\theta),$$

где $C(\theta)$ — заданная периодическая функция аргумента θ, с периодом, кратным 2π.

Сформулируем некоторые свойства нелинейного оператора $\hat{C}$. Заметим, что в силу определенной симметрии задачи синтеза и оператора $\hat{C}[u_0, u_1, \theta]$ относительно аргументов u_0 и u_1, основные свойства по этим аргументам аналогичны. Поэтому можно заранее зафиксировать $u_0(\varphi)$ и, обозначив $u_1(\varphi)\equiv u(\varphi)$, там, где это не вызовет недоразумений, писать

$$\hat{C}[u_0(\varphi), u_1(\varphi), \theta]=\hat{C}[u, \theta]$$

и все свойства оператора $\hat{C}$ рассматривать в отношении аргумента u. Кроме того, будем считать, что θ есть угол поворота кривой $\rho=u_0(\varphi)$ (фиксированной) по часовой стрелке, а кривая $\rho=u_1(\varphi)$ неподвижна.

Итак, сформулированная выше задача синтеза емкостного преобразователя указанного типа сводится к решению операторного уравнения

$$\widehat{C}[u(\varphi),\ \theta]=C(\theta).$$

Оператор $\widehat{C}$, стоящий в левой части уравнения (1), нелинеен, причем авторам известен лишь один случай (эксцентрических окружностей), когда он допускает аналитическое представление. Ниже поясним, как можно обойти возникшие трудности решения уравнения (1). Это достигается несколькими путями.

Емкость есть чисто геометрическая характеристика двусвязной области и связана с ее модулем М [2] следующим соотношением:

$$C=1/\ln \mathrm{M}. \tag{2}$$

Поэтому задачи определения двусвязных областей по заданным C и М эквивалентны. Для нахождения модуля М, который является инвариантом конформного преобразования области G, достаточно построить $|f(z)|$, где $w=f(z)$ — регулярная функция, конформно отображающая область G на круговое кольцо плоскости w, К:$1<|z|<$М.

В рассматриваемом здесь динамическом случае построения $|f^{\theta}(z)|$ (или модуля обратной ей функции $|(f^{\theta})^{-1}(w)|$) была предпринята попытка провести при помощи решения серии параметрических (с параметром θ) специальных задач Дирихле для кольца $\mathrm{K}^{\theta}: 1<|z|<\mathrm{M}(\theta)$ либо с использованием формул типа Вилла [3], что требовало вычислений двоякопериодической ζ-функции Вейерштрасса [4] в точках, зависящих от θ. На этом пути возникают значительные трудности.

Во-первых, пока не представляется возможным выразить закон соответствия точек границ области G^{θ} и кругового кольца K^{θ} при изменении θ. Во-вторых, даже если это удастся сделать с помощью некоторой вспомогательной функции (например, рассмотрев отображение G^{θ} на плоскость с двумя разрезами вдоль прямых, проходящих через одну точку, и сведя все к системе 2 интегральных уравнений), все равно, переходя к граничным кривым, придется линеаризовать уравнения, чтобы получить возможность установления теорем существования и единственности и построения устойчивого численного метода.

По изложенным причинам предпочтительнее сразу линеаризовать нелинейное уравнение (1) и получить некоторые свойства оператора $\widehat{C}$ с помощью указанной нами в [5] формулы для вариации функционала в зависимости от малых вариаций границы.

Предложение 1. Вариация функционала $C[u]$ при вариации $h(\varphi)$ граничной кривой $\gamma_1: \rho=u(\varphi)$ — выражается формулой

$$\delta C\,[u, h]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial n}[u(s)]\right\}^2 h\,(s)\,dS. \tag{3}$$

Используя предложение 1, легко получить следующее свойство оператора $\widehat{C}$:

Предложение 2. Оператор $\hat{C}[u(\varphi),\ \theta]$ монотонен по u относительно конуса неотрицательных в $C_1[0, 2\pi]$ функций $u(\varphi)\geqslant 0$ [6].

Действительно, пусть $0<u_1(\varphi)\leqslant u_2(\varphi)$. Очевидно, что существует последовательность малых неотрицательных вариаций $0\leqslant h_1(\varphi), \ldots$ $\ldots, h_n(\varphi)$, позволяющих перейти от $u_1(\varphi)$ к $u_2(\varphi)$. При этом, используя формулу (3), получаем серию неравенств

$$\hat{C}\,[u_1(\varphi)+h_1(\varphi), \theta]\leqslant\ldots\leqslant\hat{C}\left[u_1+\sum_{\nu=1}^{n}h_{\nu}, \theta\right]=\hat{C}\,[u_2(\varphi), \theta],$$

откуда и следует монотонность оператора $\hat{C}$.

Аналогично выводится *предложение 2′*. Оператор $\hat{C}[u_0(\varphi), u_1(\varphi), \theta]$ антитонен по $u_0(\varphi)$ относительно конуса $u_0(\varphi) \geqslant 0$ в $C^1[0, 2\pi]$ [6].

Предложение 3. Оператор $\hat{C}[u(\varphi), \theta]$ действует из пространства непрерывно-дифференцируемых периодических функций с периодом 2π $C^1[0, 2\pi]$ в пространство $C^1[0, 2\pi]$. Иными словами, если фиксировать $u(\varphi) \in C^1[0, 2\pi]$, то $C(\theta)\hat{C}[u(\varphi), \theta] \in C^1[0, 2\pi]$.

Действительно, рассмотрим выражение

$$\frac{C(\theta+\Delta\theta)-C(\theta)}{\Delta\theta} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial G_\theta}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial n}[\varphi, u(\varphi-\theta), \theta]\right\}^2 \frac{\delta n[\varphi, u(\varphi-\theta), \Delta\theta]}{\Delta\theta}\, dS_\theta =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1^\theta}\left[\frac{\partial\omega}{\partial n}(\varphi, \theta)\frac{\delta n[\varphi, u(\varphi-\theta), \Delta\theta]}{\Delta\theta}\right] dS_\theta.$$

Достаточно, очевидно, показать, что при любых θ и φ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\delta n[\varphi, u(\varphi-\theta), \Delta\theta]}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\delta n(\varphi, \theta, \Delta\theta)}{\Delta\theta} = A(\varphi, \theta).$$

Существование указанного предела следует из рассмотрения неравенства

$$\left|\frac{\delta u}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)}\right| \geqslant |\delta n|,$$

справедливого при любых $u(\varphi)$ и $\delta n(\varphi, \theta, \Delta\theta)$, если последняя величина определена. Здесь μ обозначает угол между радиус-вектором точки $\{u(\varphi), \varphi\}$ и положительным направлением касательной к кривой $\rho = u(\varphi)$ в этой точке. Ясно, что $\delta u(\varphi, \theta, \Delta\theta) = u(\varphi-\theta+\Delta\theta) - u(\varphi-\theta)$ есть бесконечно малая первого порядка относительно $\Delta\theta$, поэтому, показав, что $|\delta n| = 0\,(|\delta u|)$ (т. е. $|\delta n|$ и $|\delta u|$ имеют одинаковый порядок при $\Delta\theta \to 0$), мы и установим существование конечного предела

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\delta n(\varphi, \theta, \Delta\theta)}{\Delta\theta}.$$

Из неравенства $\left|\frac{\delta u}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)}\right| \geqslant |\delta n|$ следует, что

$$\frac{1}{|\sin\mu|} > \left|\frac{\delta n}{\delta u}\right| \text{ и } \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{|\sin\mu|} = \frac{1}{|\sin\mu|} > \lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\delta n}{\delta u}\right|, \quad \delta u \neq 0.$$

Нетрудно показать, что $\mu = \operatorname{arctg}\dfrac{u(\varphi-\theta)}{u'_\varphi(\varphi-\theta)}$ и не зависит от $\Delta\theta$. Поэтому

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{|\sin\mu|} = \frac{\sqrt{u^2(\varphi-\theta)+u'^2(\varphi-\theta)}}{u'(\varphi-\theta)} = A(\varphi, \theta).$$

Очевидно, величина, обозначенная $A(\varphi, \theta)$, конечна всюду, кроме таких точек φ, что $u'(\varphi-\theta) = 0$. Но в таких точках касательная к кривой $\rho = u(\varphi-\theta)$ перпендикулярна направлению радиус-вектора $u(\varphi-\theta)$ и $|\delta n| = |\delta u|$.

Таким образом, и в данном случае $\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\delta n}{\Delta\theta}$ существует и равен ± 1. Если же $\delta u(\varphi-\theta) = 0$, то и $\delta n(\varphi-\theta) = 0$.

Мы показали, что $\delta n(\varphi, \theta, \Delta\theta) = A(\varphi, \theta)\Delta\theta$ при $\Delta\theta \to 0$, и, значит, функция $C(\theta)$ дифференцируема по θ в любой точке отрезка $[0, 2\pi]$, периодична с периодом 2π и производная $C^1(\theta)$ ограничена на этом отрезке. Следовательно, $C(\theta) \in C^1[0, 2\pi]$.

Примечание. Мы полагаем, что справедливо более сильное утверждение, а именно: если $u(\varphi) \in C^1$ (что, впрочем, тоже является слишком жестким ограничением), то функция $C(\theta) = \hat{C}[u, \theta]$ аналитична по угловому параметру θ. Однако для тех методов, которые авторы собираются предложить при численном решении задачи синтеза, этот факт не является существенным.

Предложение 4. Оператор $\hat{C}[u,\theta]$ дифференцируем по Фреше. Действительно, используя формулу (3), при любом θ можно написать

$$\hat{C}[u+h, \theta] - \hat{C}[u, \theta] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} [u(s), \theta] \right\}^2 h(s)\, dS + 0(\|h\|^2)$$

(относительно члена $0(\|h\|^2)$, см. [5]), откуда следует высказанное утверждение. Следовательно,

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial u} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} [u(s), \theta] \right\}^2 h(s)\, dS. \tag{4}$$

Мы пишем частную производную $\frac{\partial \hat{C}}{\partial u}$ потому, что в действительности

$$\hat{C}[u(\varphi), \theta] = \hat{C}[u_0(\varphi), u_1(\varphi), \theta].$$

Аналогично показывается существование производной оператора $\hat{C}[u_0, u_1, \theta]$ по первому аргументу

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial u_0} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_0} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} [S,\theta] \right\}^2 h_0(s)\, dS.$$

Может показаться, что мы нисколько не упростили первоначальную задачу, введя выражение (4). На самом же деле, если фиксировать $u(\varphi) \equiv 1$, то получим значительное упрощение.

Во-первых, в силу физических соображений, емкость $\hat{C}[u, \theta]$ не зависит от θ при $u \equiv \text{const}$. Отсюда следует, что нам достаточно один раз найти гармоническую меру $\omega(\rho, \varphi)$ границы $\rho = 1$ относительно области $G^0: 1 < |z| < u_0(\varphi)$. Гармонические меры границы $\rho = 1$ областей $C^\theta: 1 < |z| < u_0(\varphi + \theta)$ будут получаться следующим образом: $\omega^\theta(\rho, \varphi) = \omega(\rho, \varphi + \theta)$.

Во-вторых, выражение $\frac{\partial \hat{C}}{\partial u}$ упрощается из-за того, что нормаль к окружности $|z| = 1$ совпадает с направлением радиуса и окончательно

$$\left.\frac{\partial \hat{C}}{\partial u}\right|_{u=1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \rho} [1, \varphi + \theta] \right\}^2 h(\varphi)\, d\varphi. \tag{5}$$

Полученный оператор (5) есть линейный интегральный оператор с ядром, зависящим от суммы аргументов φ и θ. Таким образом, получена возможность приближенного нахождения функции $h(s)$, обеспечивающей с точностью $0\left(\|h(s)\|_C^2\right)$ воспроизведение изменения емкости

$$\bar{C}(\theta) = C(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} C(\theta)\, d\theta,$$

если амплитуда $\bar{C}(\theta)$ не слишком велика.

Для этого достаточно, используя регуляризирующий алгоритм Тихонова А. Н. [7], решать уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\hat{K}[h, \theta] \equiv \int_0^{2\pi} K^2(\varphi + \theta)\, h(\varphi)\, d\varphi = \overline{C}(\theta), \tag{6}$$

где

$$K^2(\varphi + \theta) \equiv \left\{\frac{\partial \omega}{\partial \rho}[1, \varphi + \theta]\right\}^2 \frac{1}{2\pi}.$$

Одновременно мы получаем возможность нахождения начального приближения для решения общей задачи синтеза. При этом предполагается использовать гладкость и монотонность нелинейного оператора $\hat{C}[u, \theta]$.

В заключение приведем пример уравнения типа (6) в случае, когда $u_0(\varphi) \equiv 1$, а $u_1(\varphi) = 2r\cos\varphi$.

Ядро оператора $\hat{K}[h, \theta]$ в этом случае удается выразить аналитически. Если ввести в качестве параметра модуль M первоначальной двусвязной области G^0, уравнение примет вид

$$\frac{(M^2-1)^2}{2\pi \ln^2 M} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)\, d\varphi}{[1 - 2M\cos(\varphi - \theta) + M^2]^2} = \overline{C}(\theta). \tag{7}$$

В данном случае $h(\varphi)$ — вариация внешней границы $u_0(\varphi)$. Уравнение (7) может служить модельной задачей для проверки устойчивости алгоритмов приближенного решения задачи синтеза.

Таким образом, для достаточно малых $\overline{C}(\theta)$ мы получаем возможность свести нелинейную задачу синтеза емкостного преобразователя к линейной задаче для интегрального уравнения 1-го рода. Это означает, что в случае существования единственного решения уравнения (6) задачу синтеза для указанных малых $\overline{C}(\theta)$ можно считать решенной.

В случае же, когда функция $\overline{C}(\theta)$ не является малой, используя предложения 2 или 4, мы получаем возможность строить приближенные методы решения нелинейной задачи синтеза.

Во-первых, благодаря монотонности и положительности оператора $\hat{C}$ допустимо после надлежащего исследования применять последовательные итерации [6].

Во-вторых, оператор $\hat{C}$ дифференцируем, поэтому можно пользоваться методами типа Ньютона решения операторных уравнений с гладкими операторами [6].

Использование при необходимости регуляризирующих алгоритмов Тихонова А. Н. [7] позволяет посредством перечисленных процедур решать в каждом конкретном случае общую нелинейную задачу синтеза емкостных преобразователей перемещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Евграфов. Аналитические функции. М., «Наука», 1965.
2. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966.
3. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций. М., Гостехиздат, 1948.
4. Э. Т. Уиттекер, Н. Дж. Ватсон. Курс современного анализа. Т. 2. М., «Наука», 1963.
5. Ю. В. Бухарцев, А. Е. Зверев. Интегральное уравнение в задаче синтеза емкостного преобразователя перемещения.— «Автометрия», 1975, № 6.
6. М. А. Красносельский и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
7. А. Н. Тихонов. О некорректно поставленных задачах. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. VIII. М., Изд. ВЦ МГУ, 1967.

Поступила в редакцию 17 сентября 1974 г.