В точки, с координатами ξ зарезервированного в п. 2 массива, удовлетворяющими уравнению (4), заносятся единицы.

4. Для каждой следующей точки x_i ($i>1$), изображения в которой $B(x_i=1)$, производится переадресация таблицы значений ξ, вычисленной в п. 3 в соответствии с заданной группой G.

Например, если G — группа сдвигов на плоскости, то переадресация заключается в сдвиге координат ξ таблицы на величину $x_i - x_1$. Для группы гомотетий на плоскости производится умножение координаты ξ_1 на $\frac{x_1^{(1)}}{x_i^{(1)}}$, а ξ_2 на $\frac{x_{(1)}^{(2)}}{x_i^{(2)}}$. Здесь $\xi=(\xi_1, \xi_2), x_i = \left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\right), x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\right)$. К вновь полученным адресам добавляются единицы.

После обработки всего исходного изображения в массиве, описанном в п. 2, построен образ $C(\xi)$.

Заметим, что описанная переадресация возможна только для транзитивной группы G. В противном случае вычисления п. 3 нужно производить для всех точек изображения с ненулевой яркостью. Однако в большинстве практически встречающихся задач группа G транзитивна.

5. По заданным порогам λ_j ($j=1, 2, \ldots, r$) определяются все точки образа $C(\xi)$, в которых $C(\xi) \geqslant \lambda_j$. В результате находятся локальные максимумы функции $C(\xi)$.

Эффективность приведенного алгоритма по сравнению с рассмотренным в работе [2] объясняется исключением полного перебора всех параметров группы G. При этом, используя переадресацию п. 4, можно избежать многократного решения уравнения (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Розенфельд. Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин. М., «Мир», 1972.
2. В. А. Ковалевский. Корреляционный метод распознавания изображений.— «Журн. вычисл. мат. и мат. физ.», 1962, т. 2, № 4.
3. Г. Буземан, Дж. Келли. Проективная геометрия и проективные метрики. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
4. P. V. C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns.— Pat. США № 3069654 (Dec. 18, 1962).

Поступила в редакцию 3 июля 1973 г.

УДК 681.335

Ю. В. БУХАРЦЕВ, А. Е. ЗВЕРЕВ

(*Москва*)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ЕМКОСТНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В работе рассматривается приближенный подход к проблеме синтеза емкостных преобразователей. Целью решения таких задач является построение контуров емкостных устройств преобразования, обеспечивающих заданную функцию изменения емкости при перемещении, линейном или угловом, одной из составляющих контура.

Получена вариационная формула изменения емкостного коэффициента при гладких вариациях границ преобразователя. На базе этой формулы выведено интегральное уравнение, позволяющее по заданной

Все интегральные уравнения являются уравнениями I-го рода, поэтому необходимо привлечение устойчивых методов при их численной реализации.

Полученные результаты могут быть использованы при практических расчетах емкостных преобразователей с заданными свойствами выхода.

Рассмотрим двусвязную область G в z-плоскости. Пусть γ_0 и γ_1 — простые жордановы кривые, составляющие границу $\gamma=\gamma_0+\gamma_1$ области G, причем они не пересекаются и γ_0 охватывает γ_1.

Введем гармоническую меру границы γ_1 относительно G: $\omega=\omega(z, \gamma_1, G)$ [1]. Емкость области G $C(\gamma_0, \gamma_1)$ определяется следующим равенством:

$$(\gamma_0, \gamma_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}\frac{\partial\omega(s)}{\partial n}\,dS,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к γ_0. При этом будем предполагать, что кривая γ_0 удовлетворяет условию существования указанной нормали.

Для получения уравнения обратной задачи (задачи синтеза) достаточно найти явное выражение функционала $C(\gamma_0, \gamma_1)$ через граничные кривые γ_0 и γ_1, что в общем случае не представляется возможным.

Найдем выражение для вариации $\delta C(\gamma_0, \gamma_1, \delta n)$ функционала $C(\gamma_0, \gamma_1)$ при малых вариациях δn границы γ области G.

Будем считать, что G — область плоскости z, ограниченная гладкими кривыми γ_ν $(\nu=1, 2, \ldots, k)$. Полная граница области G есть $\gamma=\sum\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu$.

Пусть $\zeta=\xi+i\eta$ — фиксированная точка области G и $h(z, \zeta)$ — гармоническая функция точки $z=x+iy$, принимающая на γ граничные значения

$$h(z, \zeta)=\ln|z-\zeta|;\ z\in\gamma,\ \zeta\in G.$$

Такая функция существует [2].

Определим функцию

$$g(z, \zeta)=\ln\frac{1}{|z-\zeta|}+h(z, \zeta),$$

обладающую следующими свойствами:

1) $g(z, \zeta)$ гармонична всюду в области G, кроме точки $z=\zeta$;
2) $g(z, \zeta)+\ln|z-\zeta|$ гармонична и в точке $z=\zeta$;
3) $g(z, \zeta)$ имеет нулевые граничные значения на γ.

Обычно функцию $g(z, \zeta)$ называют функцией Грина области G.

Пусть функция $u(z)$ непрерывна в $G+\gamma$ и гармонична в G, тогда

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial g}{\partial n_z}u(z)\,dS, \qquad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали.

Функция Грина $g(z, \zeta)$ допускает следующую электростатическую интерпретацию [1]. Рассмотрим границу γ области G как систему заземленных проводящих стенок, и в точке $\zeta\in G$ сосредоточим единичный заряд, который создает силовое поле, описываемое производной логарифмического потенциала. Заряд в точке ζ индуцирует на кривой γ заряды с потенциалом $h(z, \zeta)$. Функцию Грина можно рассматривать как потенциал поля, образованного точечным и индуцированными зарядами.

Функцию Грина, гармоническую относительно переменной z, можно дополнить до аналитической функции, добавив сопряженную с ней гармоническую функцию. Тогда получим

$$P(z, \zeta)=g(z, \zeta)+i\Lambda(z, \zeta).$$

Функция P гармонична относительно переменной ζ и аналитична относительно z. Она имеет логарифмический полюс в точке $z=\zeta$ и определена с точностью до мнимой аддитивной постоянной. Эта функция многозначна из-за наличия логарифмической особенности с периодом $2\pi in$. Если G — многосвязная область, то функция P, кроме того, имеет еще периоды при обходе замкнутых путей, окружающих граничные кривые γ_ν. Этими периодами служат

$$2\pi i\omega_\nu(\zeta)=\int_{\gamma_\nu} dP(z, \zeta)=i\int_{\gamma_\nu}\frac{\partial\Lambda}{\partial S}=i\int_{\gamma_\nu}\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n}dS. \qquad (2)$$

Периоды $\omega_\nu(\zeta)$ гармоничны относительно ζ и однозначны в области G. Из формулы (1) видно, что граничные значения $\omega_\nu(\zeta)$ равны 0 на всех контурах γ_μ, за исключением γ_ν, на котором они равны 1. Функция $\omega_\nu(\zeta)$ называется гармонической мерой граничного компонента γ_ν в точке ζ относительно области G.

Дополним снова $\omega_\nu(\zeta)$ до аналитической функции $w_\nu(\zeta)$, которая определена с точностью до мнимой аддитивной постоянной:

$$w_\nu(\zeta)=\omega_\nu(\zeta)+i\Omega_\nu(\zeta).$$

Вообще, функция $w_\nu(\zeta)$ обладает мнимыми периодами при обходе точкой ζ замкнутых кривых в области G. Период $\omega_\nu(\zeta)$ относительно контура γ_μ определяется по формуле

$$-2\pi iP_{\mu\nu}=i\int_{\gamma_\mu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}dS. \qquad (3)$$

Замечание. Периоды $\omega_\nu(\zeta)$ и постоянные $P_{\mu\nu}$ можно подсчитать, распространив интегралы в формулах (2), (3) на замкнутые кривые γ'_ν и γ'_μ, которые целиком лежат в области G и получаются из γ_ν и γ_μ непрерывной деформацией внутри области. Это утверждение является следствием теоремы Грина, выражающей независимость таких интегралов от пути, если пути принадлежат одному гомотопическому классу.

Из формул (2) и (3) мы получаем соотношение

$$P_{\mu\nu}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma'_\mu}\int_{\gamma'_\nu}\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z\partial n_\zeta}dS_z dS_\zeta=P_{\nu\mu},$$

выражающее свойство симметрии матрицы $P_{\mu\nu}$. Постоянные $P_{\mu\nu}$ также допускают простую электростатическую интерпретацию.

Предположим, что заземлены все проводники γ_ρ, кроме γ_ν, который имеет потенциал, равный 1; тогда электростатическое поле в области G описывается потенциалом $\omega_\nu(z)$. Из электростатики известно, что заряд на проводнике γ_μ, индуцируемый рассматриваемым полем, равен

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\mu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}dS=P_{\mu\nu}.$$

Постоянные $P_{\mu\nu}$ являются характеристиками системы проводников и называются емкостными коэффициентами системы.

Проварьируем теперь границу γ двусвязной области G следующим образом. На каждой из граничных кривых определим положительную, непрерывно дифференцируемую функцию $u_\nu(S)$, проведем внутреннюю нормаль и отложим на ней отрезок длины $\delta n_\nu = \varepsilon u_\nu(S)$.

Если ε достаточно мало, то концы построенных отрезков нормали образуют две непрерывно дифференцируемые кривые γ_1^* и γ_2^*, определяющие область G^*, целиком лежащую внутри G. Обозначим через $g(z, \zeta)$ и $g^*(z, \zeta)$ функции Грина для областей G и G^*.

Рассмотрим выражение

$$\sigma(z, \zeta) = g(z, \zeta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t = g(z, \zeta) - \varepsilon\alpha(z, \zeta),$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали; $\sigma(z, \zeta)$ — гармоническая функция, правильная всюду в G, за исключением полюса $z=\zeta$. При $z\in\gamma$ она принимает граничные значения $-\left[\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n}\right]\delta n_z$, что следует из формулы (1).

Эти значения неположительны во всех точках границы γ, так как функция Грина $g(z, \zeta)$ равна нулю на γ, положительна в G и обращается в положительную бесконечность при $z=\zeta$. Следовательно, на γ:

$$\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z} \geqslant 0.$$

Кроме того, $\delta n_z > 0$, значит

$$-\left[\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z}\right]\delta n_z \leqslant 0$$

на γ.

Так как $\delta n_z = 0\,(\varepsilon)$, а $g(z, \zeta) = 0$ на границе области G, то функция $\sigma(z, \zeta)$ должна быть малой на γ и геометрическое место точек $\sigma(z, \zeta) = 0$ должно лежать близко от границы γ.

Пусть z^* — точка контура γ^*, соответствующая точке контура γ; она лежит на нормали к γ в точке z на расстоянии δn_z от этой точки.

По формуле Тейлора можно написать

$$g(z^*, \zeta) - g(z, \zeta) = g(z^*, \zeta) = \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z}\delta n_z + 0(\varepsilon^2).$$

Заметим, что на γ имеем

$$\varepsilon\alpha(z, \zeta) = \left[\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z}\right]\delta n_z.$$

Можно оценить $0(\varepsilon^2)$ равномерно относительно ζ в любой замкнутой подобласти G.

Функция $g^*(z, \zeta) - \sigma(z, \zeta)$ — правильная гармоническая в области G^*, так как логарифмические полюса уничтожаются при вычитании; на γ^* она принимает значения порядка $0(\varepsilon^2)$, ибо функция $g^*(z, \zeta)$ обращается там в нуль. Следовательно, пользуясь принципом максимума нашей разности, рассматриваемой в зависимости от z, получим

$$g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t}\frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t + 0(\varepsilon^2), \tag{4}$$

где $0(\varepsilon^2)$ допускает равномерную оценку для $z\in G^*$ и ζ, лежащей в фиксированной замкнутой подобласти области G^*. Итак,

$$\delta g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t}\frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t$$

выражает в области G^* разность двух функций Грина с точностью до гармонической функции, допускающей оценку $0(\varepsilon^2)$ в любой подобласти области G^*.

Аналогичную вариационную формулу можно получить для гармонических мер $\omega_\rho(\zeta)$, $\rho=1, 2$. В самом деле, пусть γ'_ρ — гладкая кривая, лежащая внутри G и G^* и гомотопная γ_ρ и γ^*_ρ. Используя формулу (4) и замечание, получим

$$\omega^*_\rho(\zeta) - \omega_\rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma'_\rho}\left[\frac{\partial g^*(z, \zeta)}{\partial n_z} - \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_z}\right] dS = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma'_\rho}\frac{\partial}{\partial n_z} \times$$

$$\times [g^*(z, \zeta) - g(z, \zeta)]\, dS.$$

В силу равномерности $0(\varepsilon^2)$ в любой замкнутой подобласти области G^* выражение можно переписать в виде следующей формулы:

$$\omega^*_\rho(\zeta) - \omega_\rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma'_\rho}\frac{\partial}{\partial n_z}\left[-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t}\frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t\right] + 0(\varepsilon^2).$$

Так как порядок дифференцирования и интегрирования можно менять, когда ζ находится в замкнутой фиксированной подобласти области G, то

$$\omega^*_\rho(\zeta) - \omega_\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\int\limits_{\gamma'_\rho}\frac{\partial g(t, z)}{\partial n_z}\, dS\,\frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t + 0(\varepsilon^2) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial \omega_\rho(t)}{\partial n_t}\frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t + 0(\varepsilon^2).$$

Окончательно выражение принимает вид

$$\omega^*_\rho(\zeta) - \omega_\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial \omega_\rho(t)}{\partial n_t}\frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n_t dS_t + 0(\varepsilon^2),$$

где $0(\varepsilon^2)$ оценивается равномерно для всех точек ζ в фиксированной замкнутой подобласти области G. Воспользовавшись этим результатом, а также формулой (3) и замечанием, получаем совершенно аналогично предыдущему

$$P^*_{12} - P_{12} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma'_2}\frac{\partial \omega_1}{\partial n}\frac{\partial \omega_2}{\partial n}\,\delta n dS + 0(\varepsilon^2).$$

Следовательно,

$$\delta P_{12} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial \omega_1}{\partial n}\frac{\partial \omega_2}{\partial n}\,\delta n dS, \tag{5}$$

т. е. вариационная формула получена.

Из определения гармонических мер границ двусвязной области рассматриваемого типа следует, что $\omega_2(\zeta) = 1 - \omega_1(\zeta)$, откуда $\frac{\partial \omega_2(\zeta)}{\partial n} = -\frac{\partial \omega_1(\zeta)}{\partial n}$ и формула (5) принимает вид

$$\delta C = \delta P_{12} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\left[\frac{\partial \omega(s)}{\partial n}\right]^2 \delta n(s)\, dS. \tag{6}$$

Здесь положено $\omega_1(\zeta) \equiv \omega(\zeta)$.

На основании указанного выражения для δP_{12} можно построить приближенный метод определения по заданной функции изменения емкости $C(\theta)$ уравнения внешней кривой γ_0 при условии, что внутренняя кривая γ_1 фиксирована заранее.

Действительно, рассмотрим область вида $u_1(\varphi)<|z|<1$, где $\rho=u_1(\varphi)$ — уравнение фиксированной кривой γ_1 в полярных координатах. Очевидно, что область G^θ, получаемая при повороте γ_1 вокруг начала координат, будет иметь вид $u_1(\varphi-\theta)<|z|<1$. В области G^0 (т. е. при $\theta=0$) аналитически или численно находим гармоническую меру кривой γ_1. Пусть это будет $\omega(z)=\omega(\rho, \varphi)$. По строению G^θ ясно, что при изменении θ $\omega(\rho, \varphi)$ переходит в $\omega(\rho, \varphi-\theta)$. Емкость же области G^θ не меняется при изменении θ и равна емкости $C(G^0)=C_0$.

Пусть теперь задана $C(\theta)=C_0+f(\theta)$, где $|f(\theta)|\leqslant\varepsilon$. Проварьируем границу области G^θ, $|z|=1$. Пусть $\delta n(s)=\delta n(\varphi)$ есть выражение для этой вариации в функции полярного угла φ.

Емкость области G^θ, проварьированной на $\delta n(\varphi)$, примет значение

$$C^\theta[\gamma_1, \delta n, \theta]=C_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\omega}{\partial n}(\varphi-\theta)\right]^2\delta n(\varphi)\,d\varphi,$$

откуда, учитывая, что $\left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{|z|=1}=-\left.\frac{\partial\omega}{\partial r}\right|_{r=1}$, и приравнивая значение $C^\theta[\gamma_1, \delta n, \theta]$ заданной функции $C_0+f(\theta)$, получаем, обозначив $\delta n(\varphi)=u(\varphi)$, интегральное уравнение для определения $u(\varphi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\omega(1, \varphi-\theta)}{\partial r}\right]^2 u(\varphi)\,d\varphi=f(\theta). \tag{7}$$

Полученное уравнение 1-го рода требует использования устойчивых численных методов [3]. Отметим, что при подстановке в левую часть уравнения (7) регуляризованного приближения $\tilde{u}(\varphi)$ мы получим высокоточное воспроизведение заданной функции $f(\theta)$ лишь в том случае, когда амплитуда $f(\theta)$ достаточно мала.

Итак, в работе выведено интегральное уравнение, которое позволяет решать задачу синтеза емкостных преобразователей в первом приближении. Решение этого уравнения предполагается использовать в процессе нахождения приближенных уравнений контуров, ограничивающих преобразователь, в общей нелинейной задаче синтеза, т. е. без предположения малости амплитуды $f(\theta)$. Соответствующий численный метод предлагается строить на базе изучения некоторых «хороших» свойств нелинейного оператора емкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. А. М. Ляпунов. Работы по теории потенциала. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач.— «ДАН», 1963, т. 151, № 3.

Поступила в редакцию 17 сентября 1974 г.