

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
2. М. Д. Дольберг. О разложении позитивного ядра в билинейный ряд. — «ДАН», 1958, т. 120, № 5.
3. В. И. Чернецкий. Анализ точности нелинейных систем управления. М., «Машиностроение», 1968.
4. В. В. Быков. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., «Сов. радио», 1971.

*Поступила в редакцию 11 ноября 1974 г.,  
окончательный вариант — 12 февраля 1975 г.*

УДК 538:56:519.25.

**В. В. ИЗОХ, А. В. СЕРГЕЕВ**

(Минск)

### ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ, ЗАДАНЫХ НА ПОЛУСФЕРЕ

Использование ЭВМ открывает новые возможности перед акустической и СВЧ-голографией. Как показано в [1], фиксация волновых полей на сферической поверхности позволяет сократить количество отсчетов по сравнению с заданием отсчетов в точках плоскости при условии получения одинаковой разрешающей способности в случае, если величина угловой апертуры превосходит  $\theta_p$ . В связи с этим полезно оценить погрешность интерполяции функций, заданных на полусфере.

Пусть волновое поле, фиксируемое на полусфере радиуса  $\rho$  и описываемое функцией  $F_p(\theta, \varphi)$ , известно в конечном числе точек полусферы, координаты которых задаются, согласно [1], следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{ni}^j &= \operatorname{arctg} \frac{y_{ni}^j}{x_{ni}^j} \quad \text{при } 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \\ \varphi_{ni}^j &= \pi - \operatorname{arctg} \frac{y_{ni}^j}{x_{ni}^j} \quad \text{при } \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi; \\ \varphi_{ni}^j &= \pi + \operatorname{arctg} \frac{y_{ni}^j}{x_{ni}^j} \quad \text{при } \pi < \varphi \leq \frac{3}{2}\pi; \\ \varphi_{ni}^j &= 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{y_{ni}^j}{x_{ni}^j} \quad \text{при } \frac{3\pi}{2} < \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x_{ni}^j$ ,  $y_{ni}^j$  — проекции на оси  $X$  и  $Y$  точки дискретизации, лежащей на стороне  $n$ -го правильного шестиугольника, через которую проходит окружность радиуса  $r_i^n$ ;  $j$  — порядковый номер точек, лежащих на  $r_i^n$ , отсчитываемый от полярной оси и принимающий значения  $1 \div 6$  или  $1 \div 12$  в зависимости от величины  $r_i^n$ ;

$$\theta_{ni} = \arcsin \sqrt{\frac{n^2 + (i-1)^2 - n(i-1)}{N^2}}, \tag{2}$$

где

$$i = \begin{cases} 1 \div \frac{n}{2} + 1 & \text{при } n \text{ четном;} \\ 1 \div \frac{n+1}{2} & \text{при } n \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$n = 1 \div N.$$

Для упрощения записи поставим в соответствие каждой точке дискретизации некоторое число  $\omega$ , порядок изменения которого виден из рисунка и принимающего значения от 1 до  $W_s$ . В этом случае интерполяционную формулу можно записать следующим образом:

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{\omega=1}^{W_s} F_{\rho}(\rho \sin \theta_{\omega}, \varphi_{\omega}) g(r \cos \varphi - \rho \sin \theta_{\omega} \cos \varphi_{\omega}; r \sin \varphi - \rho \sin \theta_{\omega} \sin \varphi_{\omega}), \quad (3)$$

где функция отсчетов

$$g(x, y) = \frac{1}{k^2 x(x^2 - 3y^2)} \left( 2x \cos \frac{kx}{\sqrt{3}} \cos ky - 2x \cos \frac{2kx}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}y \sin \frac{kx}{\sqrt{3}} \sin ky \right). \quad (4)$$

Учитывая взаимно-однозначное соответствие между точками полусферы и круга ее наибольшего сечения, считаем, что волновое поле задано в точках круга радиуса  $\rho$ . Таким образом, функция  $F_{\rho}(\theta, \varphi)$  известна лишь в круге радиуса  $\rho$ , и ее отсчеты берутся в точках  $r_{\omega}, \varphi_{\omega}$ , так что

$$F_{\rho}(r_{\omega}, \varphi_{\omega}) = F_{\rho\omega}$$

при  $\omega = 1, \dots, W_s$ ; (5)

$F_{\rho}(r_{\omega}, \varphi_{\omega}) = 0$  при  $\omega > W_s$ ,

(6)

где

$$r_{\omega} = \rho \sin \theta_{\omega}. \quad (7)$$

Тогда (3) будет иметь следующий вид:

$$F(r, \varphi) = \sum_{\omega=1}^{W_s} F_{\rho\omega} g(r \cos \varphi - r_{\omega} \cos \varphi_{\omega}; r \sin \varphi - r_{\omega} \sin \varphi_{\omega}). \quad (8)$$

Будем считать, что функция  $F_{\rho}(r, \varphi)$  интегрируема в кубе. Переходя к прямоугольным координатам, это условие можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\rho}(x, y)|^3 dx dy = M < \infty. \quad (9)$$

Оценим сверху норму разности  $F_{\rho}(x, y) - F(x, y)$ :

$$\|F_{\rho}(x, y) - F(x, y)\| = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\rho}(x, y) - F(x, y)|^3 dx dy \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (10)$$

В силу неравенства Минковского [2] из (10) получим, что

$$\|F_{\rho}(x, y) - F(x, y)\| \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\rho}(x, y)|^3 dx dy \right)^{\frac{1}{3}} + \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^3 dx dy \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (11)$$

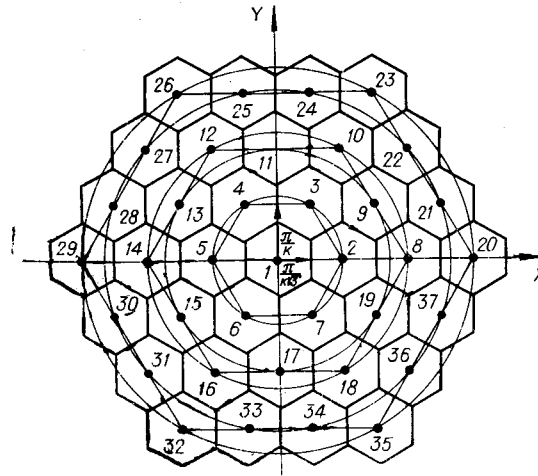


Схема задания отсчетов.

Оценим второе слагаемое в (11). Для этого прежде всего рассмотрим подробнее свойства функции  $g(x, y)$  в тех точках плоскости, в которых ее знаменатель обращается в нуль, т. е. при

$$x=0, \quad x-\sqrt{3}y=0, \quad x+\sqrt{3}y=0. \quad (12)$$

Из (4) при  $x=0$  получаем, что

$$g(0, y) = \frac{2(1 - \cos ky + ky \sin ky)}{3k^2y^2}. \quad (13)$$

Для исследования поведения (4) вдоль прямых  $x=\pm\sqrt{3}y$  представим ее в более удобном виде:

$$g(x, y) = \frac{(x + \sqrt{3}y) \cos \frac{k}{\sqrt{3}}(x + \sqrt{3}y) + (x - \sqrt{3}y) \cos \frac{k}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}y) - 2x \cos \frac{2kx}{\sqrt{3}}}{k^2x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)}. \quad (14)$$

Рассмотрим поведение функции  $g(x, y)$  вдоль прямой  $x=\sqrt{3}y$ . Обозначив  $x-\sqrt{3}y=\alpha$ , из (14) получим

$$g(x, \alpha) = \frac{(2x - \alpha) \cos \frac{k}{\sqrt{3}}(2x - \alpha) + \alpha \cos \frac{k}{\sqrt{3}}\alpha - 2x \cos \frac{2kx}{\sqrt{3}}}{k^2\alpha x(2x - \alpha)}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(x, \alpha) = \frac{1 - \cos \frac{2kx}{\sqrt{3}} + 2kx \sin \frac{kx}{\sqrt{3}}}{2k^2x^2}. \quad (16)$$

Вводя новую переменную  $t$ , изменяющуюся вдоль прямой  $x=\sqrt{3}y$ , представим (16) в виде

$$g(t) = \frac{2(1 - \cos kt + kt \sin kt)}{3k^2t^2}. \quad (17)$$

Аналогично вдоль прямой  $x=-\sqrt{3}y$  функция  $g(x, y)$  принимает вид

$$g(u) = \frac{2(1 - \cos ku + ku \sin ku)}{3k^2u^2}, \quad (18)$$

где  $u$  — переменная, изменяющаяся вдоль прямой  $x=-\sqrt{3}y$ .

Таким образом, из выражений (13), (17), (18) видно, что вдоль наиболее «опасных» прямых функция  $g(x, y)$  ведет себя одинаково.

Итак, нам нужно оценить выражение

$$\Delta_2 = \left( \sum_{l=1}^{W_s} \sum_{m=1}^{W_s} \sum_{n=1}^{W_s} |F_{\rho l}| |F_{\rho m}| |F_{\rho n}| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - x_l, y - y_l)| |g(x - x_m, y - y_m)| \times \right. \\ \left. \times |g(x - x_n, y - y_n)| dx dy \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (19)$$

Очевидно, имеем, что

$$\Delta_2 \leq \left( \sum_{l=1}^{W_s} \sum_{m=1}^{W_s} \sum_{n=1}^{W_s} |F_{\rho l}| |F_{\rho m}| |F_{\rho n}| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - x_l, y - y_l)|^3 dx dy \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (20)$$

Оценим выражение

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - x_l, y - y_l)|^3 dx dy. \quad (21)$$

Из (21) видно, что  $v$  представляет собой объем тела, ограниченный поверхностью  $|g(x-x_i, y-y_i)|^3$  и плоскостью координат и не зависящий от  $x_i, y_i$ . Вычисление (21) в общем виде затруднительно, поэтому мы сведем его оценку к вычислению объема тела, образованного вращением сечения функции  $|g(x, y)|^3$  плоскостью, проходящей через ось  $Z$ , и имеющего максимальную площадь. Сечения, имеющие максимальную площадь, должны проходить по прямым  $x=0, x=\pm\sqrt{3}y$ , так как вдоль других прямых значения функции  $g(x, y)$  убывают быстрее при удалении от начала координат. Покажем это. Рассмотрим, как меняется функция  $g(x, y)$  вдоль прямой  $x=(\sqrt{3}+a)y$ , где  $-\sqrt{3}<a<\infty$ . В этом случае имеем, что

$$g(a, y) = \frac{(2\sqrt{3}+a)\cos\frac{ky}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}+a)+a\cos\frac{kay}{\sqrt{3}}-2(\sqrt{3}+a)\cos\frac{2k}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+a)y}{k^2y^2a(\sqrt{3}+a)(2\sqrt{3}+a)}. \quad (22)$$

Вводя переменную  $\tau$ , изменяющуюся вдоль прямой  $x=(\sqrt{3}+a)y$ , получим

$$g(a, \tau) = \frac{(2\sqrt{3}+a)\cos\frac{k(2\sqrt{3}+a)\tau}{\sqrt{3}[1+(\sqrt{3}+a)^2]}+a\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}[1+(\sqrt{3}+a)^2]}-}{\frac{k^2\tau^2a(\sqrt{3}+a)(2\sqrt{3}+a)}{1+(\sqrt{3}+a)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-2(\sqrt{3}+a)\cos\frac{2k(\sqrt{3}+a)\tau}{\sqrt{3}[1+(\sqrt{3}+a)^2]}}{1+(\sqrt{3}+a)^2}. \quad (23)$$

Учитывая (17) и (23),

$$\frac{g(a, \tau)}{g(0, \tau)} = \frac{3}{2} \frac{(2\sqrt{3}+a)\cos\frac{k(2\sqrt{3}+a)\tau}{\sqrt{3}[1+(\sqrt{3}+a)^2]}+a\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}[1+(\sqrt{3}+a)^2]}-}{\frac{a(\sqrt{3}+a)(2\sqrt{3}+a)}{1+(\sqrt{3}+a)^2}(1-\cos k\tau+k\tau\sin k\tau)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-2(\sqrt{3}+a)\cos\frac{2k(\sqrt{3}+a)\tau}{\sqrt{3}[1+(\sqrt{3}+a)^2]}}{1+(\sqrt{3}+a)^2}. \quad (24)$$

Из (24) видно, что

$$\frac{g(a, \tau)}{g(0, \tau)} \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \quad (25)$$

а это и показывает экстремальность функции  $g(0, \tau)$ . Аналогичное рассмотрение можно провести и для прямых  $x=0, x=-\sqrt{3}y$ .

При оценке (21) будем считать, что функция

$$g_1(R) = 1 \text{ при } 0 \leq R \leq \frac{2\pi}{k\sqrt{3}}, \quad (26)$$

учитывая, что

$$\max_{0 \leq R \leq \infty} g(R) = \lim_{R \rightarrow 0} g(R) = 1 \quad (27)$$

и наибольший весовой эффект функции отсчетов  $g(x, y)$ , согласно [3], проявляется в круге радиуса  $\frac{2\pi}{k\sqrt{3}}$ . При  $R > \frac{2\pi}{k\sqrt{3}}$  функция

$$g_2(R) = \frac{2\left(2\sin^2\frac{kR}{2} + kR\sin kR\right)}{3k^2R^2}. \quad (28)$$

Таким образом, принимая во внимание (26) и (28), из (21) получим

$$v < \int_0^{\frac{2\pi}{k\sqrt{3}}} \int_0^{2\pi} |g_1(R)|^3 R dR d\varphi + \int_{\frac{2\pi}{k\sqrt{3}}}^{\infty} \int_0^{2\pi} |g_2(R)|^3 R dR d\varphi. \quad (29)$$

Производя вычисления в (28), получим

$$v < \frac{4\pi^3}{3k^2} + \frac{k^2}{3(2\pi)^3} + \frac{k}{3\sqrt{3}\pi^2} + \frac{4}{3\pi} + \frac{8}{9\sqrt{3}k}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (20), получаем следующую оценку:

$$\Delta_2 < \left( \delta \sum_{l=1}^{W_s} \sum_{m=1}^{W_s} \sum_{n=1}^{W_s} |F_{\rho l}| |F_{\rho m}| |F_{\rho n}| \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (31)$$

где

$$\delta = \frac{4\pi^3}{3k^2} + \frac{k^2}{3(2\pi)^3} + \frac{k}{3\sqrt{3}\pi^2} + \frac{4}{3\pi} + \frac{8}{9\sqrt{3}k}. \quad (32)$$

Окончательно из (11) при условиях (9) и (31) находим оценку сверху нормы разности  $F_{\rho}(x, y) - F(x, y)$ :

$$\|F_{\rho}(x, y) - F(x, y)\| < M^{\frac{1}{3}} + \left( \delta \sum_{l=1}^{W_s} \sum_{m=1}^{W_s} \sum_{n=1}^{W_s} |F_{\rho l}| |F_{\rho m}| |F_{\rho n}| \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (33)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Изох, А. В. Сергеев. Оптимальная дискретизация функций, заданных на полусфере.— «Журн. техн. физ.», 1973, т. 43, № 9.
2. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. D. P. Petersen, D. M. Middleton. Sampling and reconstruction of wave-number-limited functions in N-dimensional euclidean spaces.— "Inform. and Control.", 1962, vol. 5, № 2.

Поступила в редакцию 19 апреля 1974 г.

УДК 576:36:578.081.1

Л. А. АНДРИАНОВ, М. А. АХМАМЕТЬЕВ, О. П. ФЕДОРОВА,  
Е. В. ХИЖНЯК, Б. М. ШТОКМАН, М. И. ШТОКМАН

(Новосибирск)

### АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ МИТОТИЧЕСКОГО ЦИКЛА L-КЛЕТОК ПО СПЕКТРАМ ОБЪЕМОВ

Изучение динамики клеточного цикла представляется важным как с фундаментальной, так и с прикладной (например, поиск противораковых веществ) точки зрения. Эксперимент на клетках культуры ткани позволяет обеспечить воспроизводимость результатов и использовать автоматизированные методы с последующим анализом получаемой информации на ЭВМ (например, [1, 2]).

Как было показано в ряде работ (например, [3—5]) и подтверждено результатами настоящей работы, спектры клеточных объемов несут