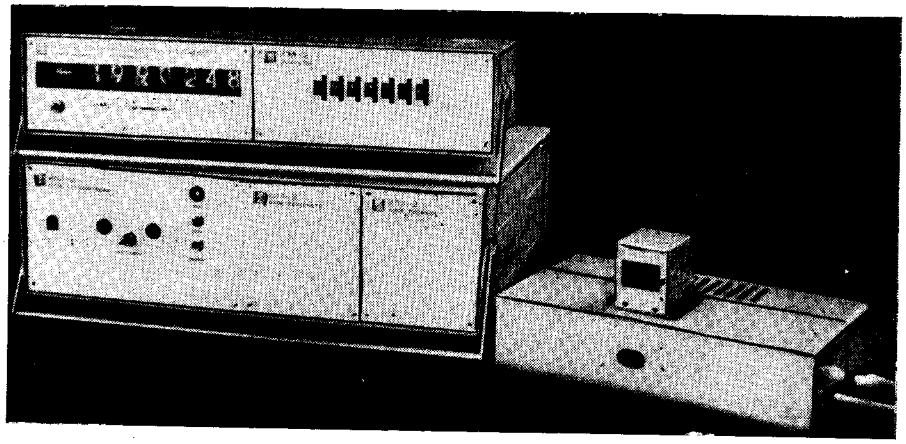

Рис. 5.

В заключение авторы выражают глубокую признательность инженерам В. Т. Березову, А. К. Мовшеву, А. К. Надыровой, О. Г. Соколову, В. И. Халимонову, принимавшим участие в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Коронкевич, Г. А. Ленкова. Лазерный интерферометр для измерения длины.— «Автометрия», 1971, № 1.
2. В. П. Кирьянов, И. Ф. Клисторин, А. М. Щербаченко. Электронное устройство счета и регистрации для лазерного измерителя перемещений.— «Автометрия», 1971, № 1.
3. А. В. Шилейко. Цифровые дифференциальные анализаторы. М., ВИНИТИ, 1961.
4. И. Л. Вульфсон, С. И. Спиваковский. Точность линейных интерполяторов.— «Станки и инструменты», 1966, № 4.
5. Ян Си-Зен. Определение максимальной погрешности двоичного умножителя.— «Автоматика и телемеханика», 1960, т. 21, № 7.
6. A. Roth. Simplify high-speed counter design.— "Electronic Design", 1970, vol. 19, № 4.

Поступила в редакцию 2 июля 1974 г.

УДК 532.57:621.378.3

Г. А. БАРИЛЛ, С. А. ТИМОХИН
(Новосибирск)

ШУМ, ВЫЗВАННЫЙ НАЛОЖЕНИЕМ СИГНАЛОВ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ В ЛАЗЕРНЫХ ДОППЛЕРОВСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЯХ СКОРОСТИ

Допплеровская частота сигнала от отдельной рассеивающей частицы в лазерных измерителях скорости, как известно [1], пропорциональна скорости движения частицы. Когда же в объеме наблюдения находятся несколько частиц, сигналы от них взаимодействуют между собой и частота суммарного сигнала начинает флюктуировать даже при неизменной скорости потока. Это мешает измерению турбулентных пульсаций скорости. Флюктуации частоты, вызванные наложением нескольких импульсов, иногда называют фазовым шумом, желая подчеркнуть, что его источником служит случайность «начальных фаз» импульсов. Последнее обстоятельство вызвано случайным распределением рассеивающих частиц в потоке. Рассмотрим подробнее свойства этого шума.

Пусть в объеме наблюдения находится n рассеивающих частиц, движущихся в общем случае с разными скоростями. Тогда суммарный сигнал, получаемый с помощью фотоприемника, можно представить следующим образом:

$$u(t)=\sum_{\text{к}=1}^{n} F_{\text{к}}(t)\exp\{i\omega_{\text{к}}(t-t_{\text{к}})\}=F(t)\exp\{i(\omega_1 t+\varphi_1+\varphi(t))\}, \qquad (1)$$

где

$$F(t)=\left\{\left(\sum_{\text{к}=1}^{n} F_{\text{к}}\cos\alpha_{\text{к}}\right)^2+\left(\sum_{\text{к}=1}^{n} F_{\text{к}}\sin\alpha_{\text{к}}\right)^2\right\}^{1/2}, \qquad (2)$$

$$\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{\text{к}=1}^{n} F_{\text{к}}\sin\alpha_{\text{к}}}{\sum\limits_{\text{к}=1}^{n} F_{\text{к}}\cos\alpha_{\text{к}}}, \qquad (3)$$

$\alpha_{\text{к}}=(\omega_{\text{к}}-\omega_1)t+(\varphi_{\text{к}}-\varphi_1)$, $\varphi_{\text{к}}=-\omega_{\text{к}}t_{\text{к}}$, $F_{\text{к}}=F_{\text{к}}(t)$ — функция, описывающая форму к-го импульса, которая определяется геометрией оптической схемы лазерного измерителя, $\omega_{\text{к}}$ — допплеровская частота к-го импульса.

Из (1)—(3) видно, что суммарный сигнал модулирован как по амплитуде, так и по фазе. Частота допплеровского сигнала пропорциональна скорости лишь для одиночной частицы. В случае же нескольких частиц мгновенная частота допплеровского сигнала (1) $\omega_1+\varphi'(t)$ может значительно отличаться и даже не зависеть от скорости любой из них. Для определенности рассмотрим разность между частотой сигнала (1) и частотой ω_1:

$$\begin{aligned}\nu=\varphi'(t)=\frac{1}{F^2}\sum_{\text{к}=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\{&(F'_{\text{к}}F_l-F_{\text{к}}F'_l)\sin\alpha_{\text{к}}\cos\alpha_l+\\&+F_{\text{к}}F_l[(\omega_{\text{к}}-\omega_1)\cos\alpha_{\text{к}}\cos\alpha_l+(\omega_l-\omega_1)\sin\alpha_{\text{к}}\sin\alpha_l]\},\end{aligned} \qquad (4)$$

где $F'_m=F'_m(t)$ — производная огибающей m-го импульса.

Из (4) следует, что при $n=1$ величина $\nu=0$. При других n величина $\nu(t)$, которую будем называть шумом, вызванным наложением импульсов, зависит как от формы импульсов, так и от моментов их появления. Вследствие случайного характера моментов прихода частиц в объем наблюдения и величины импульсов шум $\nu(t)$ является случайной функцией времени. Он может принимать сколь угодно большие значения в моменты времени, когда огибающая одиночного импульса претерпевает разрыв или огибающая $F(t)$ суммарного сигнала равна нулю. В эти моменты могут происходить перескоки фазы сигнала (1).

Одним из способов борьбы с шумом $\nu(t)$ может служить снижение концентрации рассеивающих частиц для уменьшения вероятности наложения импульсов. Однако концентрацию частиц нельзя делать слишком низкой, так как при этом в интервалах между импульсами теряется информация о скорости потока [2]. В условиях низкой концентрации наибольший практический интерес представляет характер поведения шума $\nu(t)$ при малых n. Рассмотрим эти ситуации подробнее.

Наложение двух импульсов. Пусть в объеме наблюдения находятся две рассеивающие частицы, следующие за потоком с одинаковой скоростью. В этом случае $\omega_1=\omega_2=\omega$ и выражения (2)—(4)

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}, \qquad (5)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha},$$

$$\nu(t) = \frac{F_1F_2' - F_1'F_2}{F^2}\sin\alpha = \frac{k'\sin\alpha}{1 + k^2 + 2k\cos\alpha}, \qquad (6)$$

где $k = k(t) = F_2(t)/F_1(t)$, $k' = k'(t)$, $\alpha = 2\pi\left\langle\frac{t_1 - t_2}{T}\right\rangle$, $T = 2\pi/\omega$ — период допплеровского сигнала, $\langle x\rangle$ — дробная часть x.

Из этих выражений следует, что $\nu(t)$ зависит как от соотношения амплитуд, так и от моментов появления импульсов. Эти моменты обычно связаны с какими-нибудь характерными точками импульсов. Шум $\nu(t)$ является периодической функцией разности $t_2 - t_1$. Если эта разность кратна по величине целому числу периодов T, то $\alpha = 0$ и, следовательно, $\nu(t) = 0$. Шум $\nu(t)$ также равен нулю на отрезках времени, где отношение $k(t) = F_2(t)/F_1(t)$ постоянно. Из (6) следует также, что шум может принимать большие значения в точках резкого изменения функции $k(t)$ и когда мала огибающая суммарного сигнала $F(t)$. В точках, где $k(t)$ имеет разрывы или $F(t) = 0$, функция $\nu(t)$ претерпевает бесконечные разрывы. В эти моменты наблюдаются скачки фазы сигнала (5). Из приведенных выражений видно, что $F(t)$ может обратиться в нуль лишь в момент равенства огибающих ($k(t) = 1$) при выполнении условия $\alpha = \pi$. При всех других α шум в этот момент принимает значение $\nu_1 = \frac{k'}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. В ряде случаев значение шума $\nu(t)$ при $k(t) = 1$ является максимальным. Это справедливо, в частности, для импульсов, огибающая которых описывается гауссоидой [3].

Если форма импульсов описывается разрывной функцией, то перескоки фазы суммарного сигнала могут происходить в точках разрыва. В качестве примера рассмотрим случай наложения двух импульсов прямоугольной формы. Пусть

$$u(t) = \Pi_1(t)\exp\{i\omega(t - t_1)\} + \Pi_2(t)\exp\{i\omega(t - t_2)\},$$

где

$$\Pi_к(t) = \begin{cases} a_к & \text{при} \quad (t - t_к) < \frac{\tau_к}{2}; \\ 0 & \text{при других } t; \end{cases}$$

$a_к$ — амплитуда к-го импульса, $\tau_к$ — длительность к-го импульса, к$=1,2$.

При наложении таких импульсов шум (6) имеет вид

$$\nu(t) = \frac{\Pi_1\Pi_2(\delta(t - t_2) + \delta(t - t_1 - \tau_1))\sin\alpha}{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + 2\Pi_1\Pi_2\cos\alpha},$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция.

Отсюда следует, что $\nu(t)$ обращается в нуль при $\alpha = 0$. При других α в моменты времени t_2 и $t_1 + \tau_1$ наблюдаются перескоки фазы, а следовательно, и бесконечные выбросы мгновенной частоты.

Из изложенного выше видно, что при наложении импульсов от двух частиц мгновенная частота допплеровского сигнала не может служить достоверной оценкой скорости потока. В связи с этим представляет интерес оценка скорости за фиксированное время θ по усредненной частоте допплеровского сигнала. Усреднение может быть выполнено, например, путем определения числа периодов допплеровского сигнала, укладывающихся в интервал θ. Если величину θ выбрать соизмеримой с длительностью импульса, то, учитывая допущение о неизменности доплеровской частоты в импульсе, можно записать

$$\nu^* = \frac{1}{\theta}\int_{t_1}^{t_1+\theta} \nu(t)\,dt = \frac{\varphi(t_1+\theta,-(\varphi(t_1))}{\theta},$$

где $\varphi(t)$ определяется выражением (5).

Из (5) находим, что $\varphi(t_1)=0$. Если θ превышает или равно длительности импульса, то $\varphi(t_1+\theta)=\alpha-m\pi\,(m\pi-\pi/2<\alpha<m\pi+\pi/2)$. Таким образом, можно записать следующее равенство:

$$\nu^{*}=\alpha-m\pi/\theta,$$

где $\alpha=2\pi\left\langle\frac{t_1-t_2}{T}\right\rangle$. Величину $\left\langle\frac{t_1-t_2}{T}\right\rangle$ естественно считать случайной величиной, равномерно распределенной в отрезке $[0, 1]$. Тогда математическое ожидание помехи $\overline{\nu^*}=0$, а ее дисперсия $\sigma^2=\pi^2/12\theta^2$. Последнее выражение можно записать в другом виде: $\sigma^2/\omega^2=T^2/48\theta^2$. Если, например, в импульсе укладывается 20 доплеровских периодов, а время усреднения выбрано равным длительности импульса, то $\sigma^2/\omega^2=$ $=T^2/48\theta^2\simeq 5{,}2\cdot 10^{-5}$. Следовательно, среднее значение помехи равно нулю, а ее среднеквадратическое отклонение составляет $\sim 0{,}23\%$ от доплеровской частоты. Таким образом усреднение частоты за время θ может достаточно эффективно сглаживать ее флюктуации, вызванные наложением импульсов.

Наконец, рассмотрим случай, когда в объеме наблюдения находятся две частицы с разными скоростями. При этом $\omega_1\neq\omega_2$ и мгновенная частота суммарного сигнала отличается от ω_1 на величину

$$\nu(t) = \frac{(\omega_2-\omega_1)(k^2+k\cos\alpha)+k'\sin\alpha}{1+k^2+2k\cos\alpha}. \tag{7}$$

Здесь $\alpha=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$. Заметим, что при $F_1\gg F_2$ можно принять $\nu\simeq 0$, и, следовательно, частота суммарного колебания равна ω_1. Если же $F_2\gg F_1$, то $\nu\simeq\omega_2-\omega_1$ и частота равна ω_2. Если огибающие импульсов полностью совпали, то $\nu=\omega_2-\omega_1/2$, а частота колебания равна полусумме $\omega_1+\omega_2/2$. При $\omega_1=\omega_2$ выражение (7) переходит в (6).

Рассмотрим значение помехи (7) в момент равенства огибающих ($k=1$)

$$\nu_1 = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}+\frac{k'}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда следует, что ν_1 является периодической функцией α, которая при $\alpha=2m\pi$ равна $\omega_2-\omega_1/2$, а при $\alpha=(2m+1)\pi$ $(m=0, 1, 2,\ldots)$ имеет бесконечные разрывы.

Наложение трех импульсов. Пусть в объеме извлечения информации одновременно находятся три рассеивающие частицы, имеющие одинаковую скорость. В этом случае мгновенная частота суммарного сигнала отличается от доплеровской частоты ω на величину

$$\nu(t) = \frac{k_1'\sin\alpha_1+k_2'\sin\alpha_2+\left(k_2'k_1-k_1'k_2\right)\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{1+k_1^2+k_2^2+2k_1\cos\alpha_1+2k_2\cos\alpha_2+2k_1k_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)}, \tag{8}$$

где

$$k_1=k_1(t)=\frac{F_2(t)}{F_1(t)}, \qquad k_2=k_2(t)=\frac{F_3(t)}{F_1(t)};$$

$$\alpha_1=2\pi\left\langle\frac{t_1-t_2}{T}\right\rangle, \qquad \alpha_2=2\pi\left\langle\frac{t_1-t_3}{T}\right\rangle,$$

$\langle x\rangle$ — дробная часть x, $T=2\pi/\omega$.

Как видно из (8), $\nu(t)$ обращается в нуль при $\alpha_1=\alpha_2=$, т. е. когда отношения t_2-t_1/T и t_3-t_1/T — целые числа. Кроме того, $\nu(t)$ может принимать сколь угодно большие значения в точках разрыва огибающих отдельных импульсов, а также в точках, где равна нулю огибающая суммарного сигнала. Последнее происходит при выполнении следующего условия: $k_1 \exp\{i\alpha_1\}+k_2 \exp\{i\alpha_2\}=-1$, которое осуществляется, в частности, при $\alpha_1=\alpha_2=\pi$ и $k_1+k_2=1$. Если k_1 и k_2 выразить через отношения огибающих, то условие $k_1+k_2=1$ принимает более наглядный вид: $F_2(t)+F_3(t)=F_1(t)$. Учитывая случайный характер моментов появления рассеивающих частиц в объеме наблюдения, можно заключить, что вероятность события $\alpha_1=\alpha_2=\pi$ равна нулю. Однако возможны случаи, когда величины α_1 и α_2 близки настолько, что $\nu(t)$ превышает любое заданное значение.

Если частота усредняется за время θ, равное или превышающее длительность сигнала, то

$$\nu^* = \frac{1}{\theta}\int_{t_1}^{t_1+\theta}\nu(t)\,dt = \frac{\alpha_2-\alpha_1-(m-n)\pi}{\theta}; \qquad \begin{aligned} m\pi-\frac{\pi}{2} &< \alpha_2 < m\pi+\frac{\pi}{2};\\ n\pi-\frac{\pi}{2} &< \alpha_1 < n\pi+\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Считая α_1 и α_2 независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в отрезке $[0,2\pi]$, находим, что $\overline{\nu^*}=0$, а $\sigma^2=\pi^2/\sigma\theta^2$. Таким образом, дисперсия шума ν^* при наложении трех импульсов вдвое больше, чем при наложении двух импульсов.

Сравнивая результаты, полученные для двух и трех импульсов, легко заметить, что увеличение числа импульсов мало влияет на характер поведения шума $\nu(t)$. Как в том, так и в другом случае шум может принимать сколь угодно большие значения в моменты времени, когда огибающая суммарного сигнала равна нулю. Кроме того, $\nu(t)=0$ для синфазных импульсов. Полученные результаты легко распространяются на случай наложения четырех импульсов и более.

Статистические характеристики шума. Из выражения (4) видно, что для определения статистических характеристик шума $\nu(t)$ необходимо знать совместную плотность вероятности значений огибающих $F_к$, их производных $F'_к$ и величин $\alpha_к$ ($к=1, 2, \ldots, n$) в совпадающие моменты времени. Когда число перекрывающихся импульсов невелико, указанная плотность вероятности определяется формой отдельных импульсов. При больших n сигнал (1) приближается к нормальному процессу, так как в каждый момент времени он представляет собой сумму большого числа статистически независимых случайных величин [4]. Если последовательность моментов появления импульсов $\{t_n\}$ стационарна, то (1) стремится к стационарному процессу

$$u(t) = \left(F_c^2(t)+F_s^2(t)\right)^{1/2}\cos(\omega_0 t+\varphi(t)), \tag{9}$$

где ω_0 — центральная частота спектра сигнала, пропорциональная скорости потока,

$$F_c(t) = \sum_{к=1}^{n} F_к(t)\cos\alpha_к \text{ и } F_s(t) = \sum_{к=1}^{n} F_к(t)\sin\alpha_к$$

являются нормальными случайными процессами, медленно меняющимися по сравнению с $\cos\omega_0 t$; $\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{F_s(t)}{F_c(t)}$. Корреляционные функции процессов $F_c(t)$ и $F_s(t)$, как известно (см., например, [5]), равны между собой и связаны с энергетическим спектром $S(\omega)$ сигнала (1) следующим образом:

$$\sigma^2\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega_0-\omega)\,\tau d\omega. \tag{10}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда спектр $S(\omega)$ симметричен относительно ω_0. Мгновенная частота сигнала (9) отличается от ω_0 на величину $\nu=\varphi'(t)$, которая в каждый момент времени является случайной с плотностью вероятности [5]

$$p(\nu)=\frac{-\rho_0''}{2\left(\nu^2-\rho_0''\right)^{3/2}},\tag{11}$$

где

$$\rho_0''=\left.\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

Отсюда нетрудно найти, что математическое ожидание шума $\nu(t)$ равно нулю, а дисперсия шума не существует (равна бесконечности). Последнее объясняется наличием перескоков фазы. Поэтому в качестве числовой характеристики обычно используют математическое ожидание модуля ν, равное $M[|\nu|]=\sqrt{-\rho_0''}$. Из (11) легко найти вероятность того, что шум не будет превышать по модулю некоторого заданного значения ν_0:

$$P\{|\nu|<\nu_0\}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho_0''}{\nu_0^2}}},$$

при $\nu_0^2\gg-\rho_0''$ можно использовать приближенное равенство

$$P\{|\nu|<\nu_0\}\simeq 1+\frac{1}{2}\frac{\rho_0''}{\nu_0^2}.$$

Корреляционная функция шума находится следующим образом [5]:

$$K_\nu(\tau)=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho''(\tau)}{\rho(\tau)}-\frac{\rho'^2(\tau)}{\rho^2(\tau)}\right)\ln\left(1-\rho^2(\tau)\right),\tag{12}$$

где $\rho(\tau)$ задано выражением (10). Отсюда следует, что корреляционная функция шума определяется свойствами спектра сигнала (1). Форма спектра $S(\omega)$ допплеровского сигнала зависит от геометрии оптической схемы измерителя и функции распределения вероятностей скорости потока в объеме наблюдения. Пусть, например, объем наблюдения имеет гауссовскую форму, а скорость потока остается постоянной. В этом случае $\rho(\tau)=\exp\left\{-\frac{1}{2}(\Delta\omega\tau)^2\right\}$, где $\Delta\omega$ — ширина полосы спектра, и (12) принимает вид [1, 4, 5]

$$K_\nu(\tau)=-\frac{1}{2}(\Delta\omega)^2\ln\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{2}(\Delta\omega\tau)^2\right\}\right).$$

Энергетический спектр шума при этом равен

$$S_\nu(\omega)=\frac{\Delta\omega}{4\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{\omega^2}{4n(\Delta\omega)^2}\right\}.\tag{13}$$

Анализ (13) показывает, что на высоких частотах ($\omega\gg\Delta\omega$) спектр $S_\nu(\omega)$ затухает как $\Delta\omega^2/2\omega$. На частотах, не превышающих $\Delta\omega$, функция $S_\nu(\omega)$ меняется мало. Это дает основание аппроксимировать ее на этом участке константой, равной значению в начале координат $S_\nu(0)=0{,}368\,\Delta\omega$. Поскольку $\Delta\omega$ обычно значительно превышает высшую частоту турбулентных пульсаций, то на практике шум $\nu(t)$ принято считать белым [1, 4, 6]. Эти результаты хорошо подтверждаются экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

центрациях рассеивателей.— В кн.: Когерентно-оптические допплеровские устройства в гидроаэродинамическом эксперименте. Новосибирск, Изд. ИАЭ СО АН СССР, 1975.

4. W. George, J. Berman. Doppler ambiguity in laser Doppler velocimeters.— "Appl. Phys. Lett.", 1973, vol. 23, № 5.
5. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1966.
6. В. С. Соболев. О спектре «фазового» шума на выходе лазерного допплеровского измерителя скорости потоков.— «Автометрия», 1974, № 6.

Поступила в редакцию 24 апреля 1975 г.

УДК 621.375.826:531.715.1

Г. А. ЛЕНКОВА

(Новосибирск)

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЛАЗЕРНЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для построения оптической схемы интерферометра, оптимальной в отношении светосилы, необходимо направление поляризации излучения источника света согласовать с положением отражающих поверхностей. Например, из анализа формул Френеля известно, что коэффициент отражения достигает максимального значения при ориентации вектора поляризации перпендикулярно плоскости падения. Кроме того, в этом случае исключается возможность преобразования излучения в эллиптически поляризованное при отражении от покрытых поверхностей и при полном внутреннем отражении.

В лазерных интерферометрах, предназначенных для измерения перемещений, линейно-поляризованное излучение обычно преобразуется с помощью фазовой пластинки в поляризованное по кругу. На выходе интерферометра двумя скрещенными относительно друг друга поляроидами выделяют две интерференционные картины, не совпадающие по фазе на 90°, наличие которых обеспечивает чувствительность интерферометра к направлению перемещения [1]. Введение поляризационных элементов (фазовых пластинок и поляроидов) изменяет соотношение интерферирующих лучей по интенсивности, а следовательно, изменяет контраст полос. Подобное же действие могут оказывать и другие оптические элементы интерферометра, например, светоделительная пластина, уголковая призма и т. д.

Влияние каждого оптического элемента удобно характеризовать с помощью матричного метода, разработанного Джонсом [2]. Метод основан на представлении любого поляризованного колебания составляющими вдоль двух ортогональных осей с определенными амплитудами и фазами (вектор Джонса), а действия оптических элементов — как преобразования электрического вектора некоторым матричным оператором. Тогда состояние поляризации выходных лучей можно определить как