

А. А. ЛЕВИН, С. П. СОКОЛОВ

(Новосибирск)

## К СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ПО ФУНКЦИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**Введение.** Свойства сигналов, характеризующие особенности измерения координат и параметров объектов, а также их разрешающие свойства, описываются функцией неопределенности  $\chi(t, \Omega)$  Вудворда

$$\chi(t, \Omega) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s\left(t' + \frac{t}{2}\right) s^*\left(t' - \frac{t}{2}\right) e^{i\Omega t'} dt', \quad T_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t')|^2 dt'.$$

Звездочка \*, стоящая над функцией, означает комплексную сопряженность. Возникает проблема синтеза сигналов, имеющих функцию неопределенности нужного вида. Задача синтеза оптимальных форм сигналов в зависимости от полноты используемой информации может решаться в двух вариантах: на основе полностью заданной функции неопределенности (ФН) или же только ее модуля (МФН).

В случае полностью заданной ФН встречаются также два варианта: а) заданная ФН реализуема, б) желаемая ФН не относится к классу реализуемых. В первом из них искомое решение с точностью до несущественного постоянного множителя получается с помощью преобразования Фурье. Несмотря на всю привлекательность этой решающей процедуры, обусловленной сравнительной простотой получения решения и его единственностью, она имеет малую практическую значимость из-за того, что случаи реализуемости желаемой ФН весьма редки и на практике приходится отыскивать сигналы, ФН которых близки с точки зрения выбранного критерия к задаваемой ФН. Среди известных методов синтеза сигналов по ФН наибольшей законченностью результатов отличается метод Сассмана [1]. В качестве меры эффективности получаемого решения задачи в постановке Сассмана используется величина среднеквадратичной ошибки

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, \Omega) - \chi(t, \Omega)|^2 dt d\Omega.$$

Здесь  $G(t, \Omega)$  — заданная ФН, а  $\chi(t, \Omega)$  — ФН синтезированного сигнала.

Существо предложенного Сассманом метода заключается в отыскании собственного вектора (соответствующего максимальному собственному значению) матрицы  $M$  коэффициентов разложения заданной ФН  $G(t, \Omega)$  по ортонормированной системе производных базисных функций  $k_{ij}(t, \Omega)$ . Функции  $k_{ij}(t, \Omega)$  являются, по существу, перекрестными функциями неопределенности функций ортонормированного базиса  $f_i(t)$  и  $f_i^*(t)$ , в котором представлен искомый сигнал

$$s(t) = \sum_k c_k f_k(t),$$

т. е.

$$k_{ij}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i\left(t' + \frac{t}{2}\right) f_j^*\left(t' - \frac{t}{2}\right) e^{i\Omega t'} dt'.$$

Для реализуемости  $G(t, \Omega)$  как ФН ( $\varepsilon=0$ ) необходимо и достаточно,

чтобы  $M$  была эрмитовой матрицей ( $M = \tilde{M}^*$ ; символом « $\sim$ » обозначается операция транспонирования) единичного ранга.

В случае нереализуемой  $G(t, \Omega)$  минимальная ошибка, достигаемая на собственном векторе матрицы,  $M$ , соответствующем максимальному собственному значению

$$\varepsilon_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, \Omega)|^2 dt d\Omega - E_{\max}^2,$$

где  $E_{\max}$  — максимальное собственное число матриц  $M$ , а соответствующий ему собственный вектор — вектор коэффициентов разложения в ряд искомого сигнала  $s(t)$  по системе функций  $\{t_k(t)\}$ .

Методы отыскания собственных значений и векторов матриц разработаны достаточно полно; так что посредством численных методов даже в сложных случаях решение может быть доведено до конца.

Рассмотренный метод синтеза сигналов обладает одним существенным недостатком: косвенностью используемого критерия оптимальности (из практических соображений вытекает важность близости модулей функций  $G(t, \Omega)$  и  $\chi(t, \Omega)$ , а не их самих). Поэтому, получив решение, нельзя быть уверенным в его оптимальности.

Оптимальное по близости модулей функций  $G(t, \Omega)$  и  $\chi(t, \Omega)$  решение в значительной степени зависит от фазовой структуры ФН, практические рецепты задания которой не известны. От этого недостатка в известной степени свободно обобщение описанной процедуры.

**Итерационная процедура Сассмана.** Обобщение описанной ранее процедуры позволяет улучшить приближение за счет вариаций фазы и найти квазиоптимальную фазовую структуру желаемой ФН, однако степень приближения зависит от того, какая фазовая функция была выбрана в качестве первоначальной.

Ввиду появляющейся возможности варьирования фазовой структуры ФН для синтеза оптимальных форм сигналов посредством этой процедуры достаточно задать только модуль ФН.

Существо итерационной процедуры [2] заключается в следующем:

1. Формируется исходная ФН  $G^0(t, \Omega)$  путем произвольного выбора фазы  $\psi(t, \Omega)$  для заданного модуля  $|G(t, \Omega)|$ , т. е.  $G^0(t, \Omega) = |G(t, \Omega)| e^{i\psi(t, \Omega)}$ .

2. Определяется матрица  $M^0$  коэффициентов разложения функции  $G^0(t, \Omega)$  по системе производных базисных функций  $\{k_{ji}(t, \Omega)\}$ . Элементы матрицы

$$M_{ji}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G^0(t, \Omega) k_{ji}^{0*}(t, \Omega) dt d\Omega.$$

3. Диагонализуется матрица  $M^0$  посредством унитарного преобразования  $Q^0 = \|q_{ji}\|$ , т. е. получается матрица  $M' = Q^{0*} M^0 Q^0$ . Элементы главной диагонали матрицы  $M'$  — собственные значения матрицы  $M^0$  — являются коэффициентами разложения исходной ФН  $G^0(t, \Omega)$  по преобразованной системе производных базисных функций  $k'(t, \Omega) = Q^0 k^0(t, \Omega) Q^{0*}$ , соответствующей преобразованному базису в пространстве сигнальных функций  $\tilde{f}'(t) = \tilde{Q}^0 \tilde{f}^0(t)$ . Определяется максимальное собственное число  $E_{v_0}$  матрицы  $M^0$ , соответствующее производной базисной функции  $k'_{v_0 v_0}(t, \Omega)$ , являющейся наилучшим приближением к  $G^0(t, \Omega)$ .

4. Осуществляется коррекция исходной ФН  $G^0(t, \Omega)$  путем замены выбранной ранее фазы  $\psi(t, \Omega)$  на фазу производной базисной функции  $k'_{v_0 v_0}(t, \Omega)$ , и описанный процесс повторяется с пункта 2 с той лишь разницей, что в качестве исходной базисной системы используется

$\{f'_k(t)\}$ , а производной —  $\{k'_i(t, \Omega)\}$ . Сходимость этого процесса доказана в [1]. Однако следует иметь в виду, что ошибка не может быть сделана сколь угодно малой.

Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока приращение максимальных собственных чисел не будет меньше заданного. После  $m$  итераций систем базисных вектор-функций имеет вид

$$\vec{f}^m(t) = \tilde{Q}^{(m)} \dots \tilde{Q}^{(1)} \tilde{Q}^{(0)} f^0(t).$$

Найденный оптимальный сигнал  $s^m(t) = f^m_v(t)$ .

Итерационная процедура позволяет в значительной степени преодолеть недостаток, присущий первой процедуре, за счет открывающейся возможности вариаций начальной фазы ФН, хотя это и связано с дополнительными затратами машинного времени.

**Модифицированный итерационный алгоритм (МИА).** Размерность функциональной матрицы  $\|k_{ij}^0(t, \Omega)\|$  сравнительно высока, а процедуры отыскания унитарного преобразования, преобразования с помощью его систем базисных функций, производных базисных функций весьма трудоемки и требуют для хранения результатов вычислений большой объем памяти. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть возможность некоторой модификации метода, направленной на снижение трудоемкости вычислительного процесса и уменьшение потребного объема памяти. Это позволило бы в свою очередь повысить мощность множества  $\{f_k(t)\}$  базисных функций (точность представления сигнала  $s(t)$ ) и уменьшить шаг дискретизации по переменным  $t$  и  $\Omega$ .

Описание модифицированного итерационного алгоритма. Пусть заданы модуль ФН  $|G(t, \Omega)|$ , система базисных функций  $\{f_k(t)\} = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$ , некоторый сигнал  $s^0(t)$  в виде вектора разложения по системе функций  $\vec{c}^0 = (c_1^0, \dots, c_n^0)$  и число  $E \geq 0$ .

1. Формируется ФН с модулем, равным  $|G(t, \Omega)|$ , и с аргументом, равным аргументу ФН сигнала  $s^0(t)$ :

$$G^0(t, \Omega) = |G(t, \Omega)| \exp \{i \text{Arg} G(t, \Omega)\};$$

$$\text{Arg} G(t, \Omega) = \text{Arg}(\vec{c}^0 \|k_{ij}^0\| \vec{c}^{0*}).$$

2. Вычисляется матрица  $M^0$  коэффициентов разложения функции  $G^0(t, \Omega)$  по системе производных базисных функций  $\{k_{ij}^0(t, \Omega)\}$ :

$$M_{il}^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G^0(t, \Omega) k_{il}^{0*}(t, \Omega) dt d\Omega,$$

3. Вычисляется максимальное собственное значение  $E'_{\max}$  матрицы  $M^0$  и собственный вектор, соответствующий этому значению:  $\vec{c}' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ . Если собственный вектор вычисляется итерациями, то в качестве начального его значения целесообразно использовать вектор  $\vec{c}^0$ .

4.  $\vec{c}^0$  заменяется на  $\vec{c}'$ , а  $E_0$  на  $E'_{\max}$ , и процедура повторяется с пункта 1. Критерием окончания процедуры является малость разности  $E'_{\max} - E_0$ . В качестве решения принимается последнее полученное значение вектора  $\vec{c}'$  (компоненты вектора  $\vec{c}'$  являются коэффициентами разложения найденного сигнала по исходной системе базисных функций  $\{f_k(t)\}$ ). Качество полученного решения характеризуется величиной  $\epsilon = 1 - (E'_{\max})^2$ , и если  $\epsilon$  велико, то можно повторить процедуру с другим начальным значением вектора  $\vec{c}^0$ .

Сравним теперь МИА и итерационную процедуру Сассмана (ИПС):

- а) Пункты 2 у обоих алгоритмов совпадают.  
 б) Пункты 3 различаются тем, что в ИПС находятся все собственные значения и собственные векторы матрицы  $M^0$ , а в МИА — только один собственный вектор с максимальным собственным числом, что, по крайней мере, в  $n$  раз проще.

в) Пункты 4 и 1 в МИА соответствуют пункту 4 в ИПС и осуществляют подготовку вычислений при следующем значении фазы ФН. Если задать одинаковую начальную фазу обоим алгоритмам, то после одной итерации они дадут совпадающие решения, т. е.  $s'(t) = f'_v(t) = \vec{c}' \vec{f}^0(t)$ . Фаза ФН, вычисленная МИА после  $m$  итераций, будет совпадать с фазой производной базисной функции  $k'_{v,v_0}(t, \Omega)$ , которую вычисляет ИПС в качестве следующего значения фазы ФН. Следовательно, и после  $m$  итераций у них будут совпадать решения, если начальная фаза была задана одинаково.

Как уже указывалось, сходимость ИПС доказана в [1], а значит, и МИА также сходится.

В то же время отсутствие преобразований производных базисных функций в МИА сокращает вычисления при переходе к следующему значению фазы в  $n^2$  раз, так как вычисляется только одна новая производная базисная функция  $k'_{v,v}(t, \Omega)$ . Это приводит к сокращению вычислений при одной итерации примерно в  $n^2/2$  раз. Кроме того, если функции  $k_{\mu}(t, \Omega)$  задаются алгоритмом, то нет необходимости хранить их вычисленные значения.

**Численный эксперимент.** Модифицированный итерационный алгоритм был реализован на языке «Альфа». Длина рабочих программ для ЭВМ «М-220» и «БЭСМ-6» составила соответственно 2300<sub>8</sub> и 3000<sub>8</sub> команд. В качестве сигнального базиса использовалась ортонормированная система функций  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi}{T} t} \right\}$ . При этом производные базисные функции имели вид

$$k_{jp}(t, \Omega) = \frac{\sin \left\{ \left[ (j-p)\pi + \frac{\Omega T}{2} \right] \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) \right\}}{(j-p)\pi + \Omega T/2} e^{i(j-p)\frac{2\pi}{T}t}.$$

Численный эксперимент проводился для заданного модуля ФН

$$|G(t, \Omega)| = \left| \sin \frac{\Omega T}{2} \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) / \frac{\Omega T}{2} \right|.$$

В качестве начальной фазы выбиралась фаза ФН сформированной в ЭВМ случайной вектор-функции.

С целью экономии машинного времени искомый сигнал представлялся отрезком ряда Фурье, содержащим 3, 4 гармоники, что вполне достаточно для заданной функции неопределенности.

Результаты численных экспериментов приведены в таблице. Параметры, указанные в таблице, имеют следующий смысл:  $nT$  и  $\Omega$  — число неотрицательных точек отсчета по осям  $t$  и  $\Omega$  соответственно;  $n$  — коли-

Номер варианта	$nT$	$n\Omega$	$n$	$\mu_{\text{мин}}$	$T\Omega$	$N$	$T_{\text{(реш) (мин)}}$	$\epsilon$
1	20	11	4	0,5	23,4	24	12,25	0,02
2	20	20	4	1,0	23,4	24	24	0,02
3	30	20	4	1,0	70	12	12	0,01
4	60	60	4	4,9	100	12	59	0,01
5	60	60	3	2,7	100	13	35	0,02

чество базисных функций;  $T\Omega$  — размер области задания МФН;  $t_u$  — среднее время (в минутах на «БЭСМ-6») вычисления одной итерации;  $N$  — количество итераций;  $T_{\text{реш}}$  — общее время решения задачи;  $\epsilon$  — погрешность полученного решения.

Как и ожидалось, время вычисления одной итерации оказалось пропорционально произведению  $nT \times n\Omega \times n^2$ , а количество итераций и точность решения сильно зависят от области задания МФН. Параметры  $nT$  и  $n\Omega$  определяются располагаемым объемом памяти  $N_0 = 2(2nT + 1)(2n\Omega + 1) + 6n(n + 2)$ , а значение  $T\Omega$  — допустимой точностью восстановления МФН в заданной области. Таким образом, МИА позволяет решать задачи для  $nT \times n\Omega$  до 4000 и  $n = 10$  на ЭВМ «БЭСМ-6».

Из приведенной таблицы видно, что данная задача представляется достаточно трудоемкой даже при  $n = 3$ . Учитывая то обстоятельство, что при решении практических задач  $n$  должно находиться в окрестности десяти, следует сказать, что использование ЭВМ «М-220» может представиться целесообразным лишь при решении задачи восстановления сигнала по автокорреляционной функции ( $\Omega = 0$ ).

В процессе работы с программой выявились некоторые возможности сокращения времени работы программы и памяти. Реализация этих возможностей позволит на порядок повысить быстродействие, а потребный объем памяти уменьшить до  $(nT + 1)(2n\Omega + 1) + 4n(n + 2)$  чисел.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. M. Sussman. Least-Square Synthesis of Radar Ambiguity Functions.— "IRE Trans. on Inf. Th.", 1962, v. IT-8, № 3.
2. Д. Е. Вакман. Сложные сигналы и принципы неопределенности в радиолокации. М., «Советское радио», 1965.

*Поступила в редакцию 4 июля 1974 г.*