новного прибора в $i+1$ периоде $-\hat{\varphi}_{1,i+1}(\tau)$. Если можно пренебречь отличием $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ в двух последующих периодах, то

$$\hat{\varphi}_{1,i+1}(\tau)=\bar{a}_i\bar{P}_{1,i+1}(\tau),$$

где

$$\bar{P}_{1,i+1}(\tau)=[1,\ Y_{1,i+1}(\tau),\ (Y_{1,i+1}(\tau))^2,\ \ldots,\ (Y_{1,i+1}(\tau))^m].$$

Полученные в статье результаты обобщаются на случай многокомпонентной информационной системы с одним тест-прибором, измеряющим весовую сумму сигналов компонентов вектора $\bar{X}(t)$. Можно показать, что путем изменения весовых коэффициентов и подачи эталонных сигналов могут быть идентифицированы как линейные, так и нелинейные погрешности основного комплекса приборов, измеряющих вектор $\bar{X}(t)$.

В простейшем случае тест-прибор поочередно ставится в состояния измерения компонентов параллельно приборам основного комплекса. При этом имеет место ситуация, аналогичная идентификации в однокомпонентной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Евланов. Контроль динамических систем. М., «Наука», 1972.
2. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. Под ред. П. И. Кузнецова. М., «Энергия», 1969.
3. А. М. Якубович. Методы и средства обработки информации в функционально-избыточных устройствах.— «Приборы и системы управления», 1972, № 6.

Поступила в редакцию 8 августа 1974 г.

УДК 621.317.74

Л. П. ПЛЕХАНОВ

(Москва)

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО КОНТРОЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

При анализе физических полей * часто встречается ситуация, когда известен вид дифференциального уравнения, но некоторые его параметры известны неточно. Иногда это происходит из-за сознательного упрощения математической модели явления (например, теплопереноса, диффузии), в результате чего значения некоторых коэффициентов заведомо неизвестны точно в рамках принятой модели. Иногда изменение параметров носит случайный характер. Во всех случаях обычно можно указать ограничения на изменение этих параметров.

Постановка задачи. Пусть поле $\Phi(r)$ описывается краевой задачей:

$$L(\Phi,\ \alpha)=u(r,\ \alpha),\quad r\in V;\qquad (1)$$
$$B_i(\Phi,\ \alpha)=b_i(r,\ \alpha),\quad r\in S,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где $L(\Phi, \alpha)$ и $B_i(\Phi, \alpha)$ — дифференциальные операторы, линейные по Φ;

---

* Под физическим полем будем понимать стационарно распределенную физическую величину, описываемую дифференциальным уравнением в частных производных и краевыми условиями.

$\alpha(r)=\alpha_0(r)+\Delta\alpha(r)$ — параметр; $\tilde{V}$ — открытая область, S — ее граница.

Изменение параметра удовлетворяет ограничению

$$\int\limits_V \Delta\alpha^2(r)\,dV(r)\leqslant A,\quad V=\tilde{V}+S. \tag{2}$$

Рассматриваются следующие вопросы:

1. Представление отклонения поля $\Delta\Phi(r)$ комбинацией ортонормированных координатных функций $\varphi_k(r)$:

$$\Delta\Phi(r)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(r)+R_n(r),\qquad n=1,2,\ldots, \tag{3}$$

где $\Delta\Phi(r)=\Phi(r)-\Phi_0(r)$, $\Phi_0(r)$ — известное решение (1) при $\alpha(r)=$ $=\alpha_0(r)$; $R_n(r)$ — остаточный член.

2. Аппроксимация $\Delta\Phi(r)$ по измеренным значениям поля Φ_i в точках r_i $(i=1, 2, \ldots, l)$:

$$\Delta\Phi(r)=\sum_{k=1}^{n} c_k(\Phi_i, r_i)\,\varphi_k(r)+R_{nl}(r, r_i). \tag{4}$$

3. Вычисление функционалов поля по измеренным значениям:

$$F(\Phi)=f(\Phi_i, r_i)+R_{nf}(r_i). \tag{5}$$

Требуется оценить величины остаточных членов в формулах (3) — (5) при ограничении (2) в зависимости от числа членов представления n, количества датчиков l, погрешности измерения Δ_i, координат датчиков r_i и неопределенности этих координат Δr_i.

Известные методы оценки погрешностей (см., например, [1]) основаны на знании статистических характеристик исследуемых функций и связаны с громоздким экспериментальным их определением. В данном случае можно воспользоваться детерминированным подходом и получить априорные оценки.

Оценка остаточного члена $R_n(r)$ и выбор координатных функций. Результаты классической теории аппроксимации [2] недостаточны для решения поставленной задачи, так как дают либо только порядок убывания остаточного члена при $n\longrightarrow\infty$, либо завышенные оценки. Например, следствие из второй теоремы Джексона для одномерного случая утверждает, что $\|R_n(x)\|\leqslant\frac{6^k}{n^k}M$, где $k\geqslant 1$ — порядок дифференцируемости $\Phi(x)$, $|\Phi^{(k)}(x)|\leqslant M$. При $n<6$ и больших k эта оценка завышена.

Разложим в (1) члены, содержащие α, по степеням $\Delta\alpha$ и представим задачу в виде

$$L(\Delta\Phi, \alpha_0)=\sum_j \frac{\Delta\alpha^j(r)}{j!}D_j(r),\qquad r\in\tilde{V};$$
$$B_i(\Delta\Phi, \alpha_0)=\sum_j \frac{\Delta\alpha^j(r)}{j!}P_{ij}(r),\qquad r\in S, \tag{6}$$

где $D_j(r)$ и $P_{ij}(r)$ — функции, выражаемые через $\Phi_0(r)$ и $\alpha_0(r)$.

Ограничимся членами с первой степенью $\Delta\alpha$ в правых частях (6). При необходимости более высокие степени могут быть учтены аналогично. Обозначим: $G_0(r, \xi)$ — функция Грина задачи (6); $G_i(r, \xi)$ — поверхностная функция Грина, соответствующая i-му граничному условию;

$$N(r,\xi)=D_1(r)\,G_0(r, \xi)+\sum_{i=1}^{m} P_{i1}(r)\,G_i(r, \xi).$$

Тогда решение (6) запишется как

$$\Delta\Phi(r)=\int\limits_V \Delta\alpha(\xi)N(r,\ \xi)dV(\xi). \qquad (7)$$

Выбрав в качестве c_k в (3) коэффициенты Фурье как обеспечивающие минимум интегральной квадратичной ошибки, из (7) и (3) найдем

$$R_n(r)=\int\limits_V \Delta\alpha(\xi)\left[N(r,\xi)-\sum_{k=1}^{n} c_k(\xi)\,\varphi_k(r)\right]dV(\xi), \qquad (8)$$

где

$$c_k(\xi)=\int\limits_V N(x,\ \xi)\varphi_k(x)dV(x).$$

Отсюда по неравенству Коши — Буняковского получим

$$R_n^2(r)\leqslant A\int\limits_V\left[N(r,\xi)-\sum_{k=1}^{n} c_k(\xi)\,\varphi_k(r)\right]^2 dV(\xi). \qquad (9)$$

Систему координатных функций $\varphi_k(r)$ обычно выбирают исходя из априорных сведений, удобства вычислений и других соображений. В условиях имеющейся информации (1), (2) оптимальным будет выбор $\varphi_k(r)$, минимизирующий какую-либо меру оценки остаточного члена $R_n(r)$, например интеграл по $V(r)$ правой части (9). В этом случае после преобразований интеграл запишется в виде

$$I=M-\int\limits_V\int\limits_V K(r,x)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(r)\,\varphi_k(x)\,dV(r)\,dV(x), \qquad (10)$$

где

$$M=\int\limits_V\int\limits_V N^2(r,x)\,dV(r)\,dV(x),\quad K(r,x)=\int\limits_V N(r,\xi)\,N(x,\xi)\,dV(\xi).$$

С учетом известных теорем [3] можно заключить, что минимум I достигается, если $\varphi_k(r)$ — собственные функции симметричного ядра $K(r,\ x)$, расположенные в порядке убывания его собственных чисел μ_k, для которых выполняется равенство

$$\int\limits_V K(r,x)\varphi_k(x)dV(x)=\mu_k\varphi_k(r). \qquad (11)$$

Оценка погрешности аппроксимации поля по дискретным измерениям. Пусть имеется l датчиков, погрешность измерения которых Δ_i, координаты r_i с неопределенностью Δr_i.

Для коэффициентов c_k имеем систему уравнений

$$\Delta\Phi(r_i)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(r_i)+R_n(r_i),\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ l. \qquad (12)$$

Обозначим: $\bar{c}$ — n-вектор коэффициентов c_k; $\bar{\varphi}(r)$ — n-вектор функций $\varphi_k(r)$; $\bar{\Delta}$—l-вектор Δ_i; $\Delta\bar{\Phi}$—l-вектор измерений $\Delta\Phi(r_i)$; Ψ—$l\times n$—матрица с элементами $\psi_{ik}=\varphi_k(r_i)$. Так как может быть $l\geqslant n$, будем определять c_k по методу наименьших квадратов:

$$c=\Psi^+(\Delta\bar{\Phi}-\bar{R}_n),$$

где $\Psi^+=(\Psi'\Psi)^{-1}\Psi'$, $\bar{R}_n$—l-вектор $R_n(r_i)$.

$$\Delta\Phi(r)=[\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ \bar{\varphi}(r)]+R_n(r)-[\Psi^+\bar{R}_n,\ \bar{\varphi}(r)], \qquad (13)$$

где [,] означает скалярное произведение векторов.

Первое слагаемое (13) есть приближенное значение поля, остальные составляют остаток. В пренебрежении произведениями погрешностей получим

$$|R_{nl}(r,\ r_i)| \leqslant |R_n(r) - [\Psi^+\bar{R}_n,\ \bar{\varphi}(r)]| + |[\Psi^+\Delta\Psi\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ \bar{\varphi}(r)]| + \\ + |[\Psi^+\bar{\Delta},\ \bar{\varphi}(r)]|. \quad (14)$$

Здесь $\Delta\Psi$—$l\times n$-матрица $\Delta\psi_{ik} = \varphi_k'(r_i)\Delta r_i$. Подстановка (7) и (8) в (14) позволяет выразить последнее неравенство через заданное A.

Заметим, что существует положение датчиков, минимизирующее определенную меру правой части (14).

Оценка остатка вычисления функционалов поля. Рассмотрим сначала линейные функционалы. Из (13) имеем

$$F(\Phi) = F(\Phi_0) + [\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ F(\bar{\varphi})] + R_{nf}(r_i). \quad (15)$$

Аналогично (14) можно получить

$$|R_{nf}(r_i)| \leqslant |F(R_n) - [\Psi^+\bar{R}_n,\ F(\bar{\varphi})]| + \\ + |[\Psi^+\Delta\Psi\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ F(\bar{\varphi})]| + |[\Psi^+\bar{\Delta},\ F(\bar{\varphi})]|, \quad (16)$$

где $F(\bar{\varphi})$—n-вектор с элементами $F(\varphi_k)$. Используя формулы (7) и (8), легко написать зависимость (16) от A.

Из нелинейных функционалов рассмотрим наиболее распространенный — среднеквадратичное отклонение от номинального распределения:

$$F(\Phi) = \int_V [\Phi(r) - \Phi_0(r)]^2 dV(r) \int_V \quad (17)$$

Подстановка (13) и учет ортонормированности $\varphi_k(r)$ дают

$$F(\Phi) = [\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ \Psi^+\Delta\bar{\Phi}] + R_{nf}(r_i); \quad (18)$$

$$|R_{nf}(r_i)| \leqslant |R_{n1}| + 2|[\Psi^+\Delta\Psi\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ \Psi^+\Delta\bar{\Phi}]| + \\ + 2|[\Psi^+\bar{\Delta},\ \Psi^+\Delta\bar{\Phi}]|, \quad (19)$$

где

$$R_{n1} = [\Psi^+\bar{R}_n,\ \Psi^+R_n] + \int_V R_n^2(r)\,dV(r) - 2[\Psi^+\Delta\bar{\Phi},\ \Psi^+\bar{R}_n].$$

Оценки (16) и (19) можно минимизировать, располагая соответствующим образом датчики.

Анализ правых частей неравенств (14), (16), (19) показывает, что их первые слагаемые уменьшаются с увеличением n, остальные, как правило, увеличиваются с увеличением n и l. Таким образом, можно найти сочетание n и l, при котором правые части неравенств минимальны.

ВЫВОДЫ

Получены оценки погрешностей при представлении физического поля какой-либо системой функций, аппроксимации поля по дискретным измерениям, вычисления функционалов поля. Этими оценками можно пользоваться как при анализе погрешностей, так и при решении вопросов о числе членов представления, выборе количества и расположения датчиков, выборе оптимальной системы функций.

Пример. Стационарный нейтронный поток Φ гомогенизированного ядерного реактора в форме бесконечной пластины единичной толщины описывается уравнением

$$\Phi''(z) + \alpha(z)\Phi(z) = 0;$$
$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0;$$

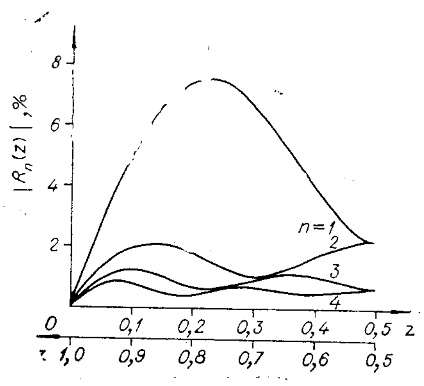

Рис. 1. Погрешность представления n гармониками.

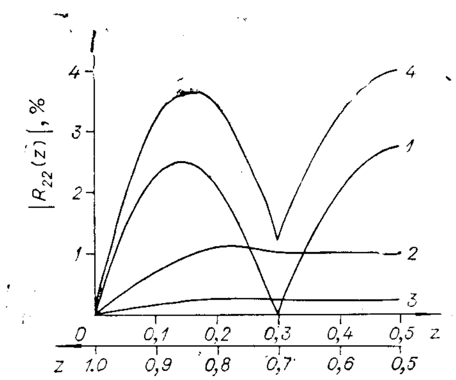

Рис. 2. Погрешность аппроксимации: *1* — вклад ошибки представления, *2* — вклад ошибок датчиков, *3* — вклад неопределенности их координат, *4* — суммарная погрешность.

$$\alpha_0(z) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{0,6}\right)^2, & 0 \leqslant z < 0,3; \\ & 0,7 < z \leqslant 1; \\ 0, & 0,3 \leqslant z \leqslant 0,7; \end{cases} \qquad \Phi_0(z) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{0,6} z, & z < 0,3; \\ 1, & 0,3 \leqslant z \leqslant 0,7; \\ \cos \frac{\pi}{0,6}(z - 0,7), & 0,7 < z \leqslant 1. \end{cases} \quad (20)$$

Взяв координатными функциями $\varphi_k(z)$ собственные функции (гармоники) задачи (20) при $\alpha = \alpha_0$, определить их число для представления с точностью до 1%, найти количество датчиков для аппроксимации с погрешностью 4% при условиях: $\int\limits_0^1 \Delta\alpha^2(z)\, \Phi_0^2(z)\, dz \leqslant 1$, погрешность датчиков $\Delta i = 1\%$ и неопределенность их координат 1%. Найти также погрешность вычисления интегрального потока $\int\limits_0^1 \Phi(z)\, dz$ с выбранным количеством датчиков.

В число координатных функций включим $\Phi_0(z)$, которая является гармоникой с нулевым собственным числом.

На рис. 1 показаны кривые оценки остатка $R_n(z)$, из которых заключаем, что $n = 4$ решает первую часть задачи. В таблице приведены максимальные погрешности аппроксимации при равномерном расположении датчиков, из которых видно, что наилучшим будет $n = 2$ и число датчиков $l = 2$, но погрешность превышает заданную.

Максимальные погрешности аппроксимации, %

l	n = 1	2	3	4	5
1	9,04				
2	8,56	4,46			
3	9,34	4,76	4,67		
4	9,74	5,40	5,22	5,65	
5	9,71	5,66	5,69	5,80	6,25

Взяв другое расположение датчиков $z_1 = 0,3$, $z_2 = 0,7$, получим необходимую точность. На рис. 2 показаны графики погрешностей для этого случая.

Наконец, погрешность вычисления интегрального потока с этими датчиками равна 3,6%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Розов, И. Б. Челпанов. О погрешности интерполяции случайной функции по дискретным данным.— «Измерительная техника», 1968, № 2.
2. П. П. Коровкин. Линейные операторы и теория приближений. М., «Наука», 1959.
3. П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.

Поступила в редакцию 1 июля 1974 г.