

«запаздывание» было обнаружено нами ранее в экспериментах с вольфрамовыми проводниками [6]. Динамическая модель данного явления может быть, по-видимому, сформулирована в рамках гидродинамического описания, дополненного соответствующим уравнением состояния и зависимостью, учитывающей изменение проводимости от плотности вещества [7].

Рассмотренные алгоритмы могут оказаться полезными при обработке результатов измерений в экспериментах по физике фазовых переходов, в том числе для проверки гипотез, качественное содержание которых представлено в настоящей работе. Они применимы также и в других случаях, когда из тех или иных априорных соображений можно выделить границу смены описаний процесса и формализовать их структуру.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
2. М. Д. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М., «Наука», 1973.
3. T. W. Anderson. The Choice of Degree of a Polynomial Regression as a Multiple Decision Problem.—“Ann. Math. Statist.”, 1962, p. 33.
4. Е. Л. Леман. Проверка статистических гипотез. М., «Наука», 1964.
5. А. М. Искольдский, В. К. Пинус. Сингулярности в решениях уравнения электрического взрыва проводников.—Препринт ИАЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1974.
6. А. П. Байков, А. М. Искольдский, Ю. Е. Нестерихин. Электрический взрыв проволочек при высоких скоростях ввода энергии.—«ЖТФ», 1973, т. XLIII, № 1.
7. Г. Кнопфель. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М., «Мир», 1972.

Поступила в редакцию 27 февраля 1975 г.

УДК 519.2.681.2.088

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Я. Я. ТОМСОНС

(Новосибирск)

### ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА В МЕТОДЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

**Введение.** При обработке результатов экспериментальных исследований для существенного уменьшения сглаживающего действия аппаратной функции  $h(\tau)$  измерительного преобразователя, описываемого уравнением

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in [0, \tau_y), \quad (1)$$

довольно часто возникает необходимость решать некорректно поставленную задачу восстановления входного сигнала, заключающуюся в построении оценки для  $x(t)$  по зарегистрированному выходному сигналу  $\tilde{y}(t) = y(t) + n(t)$  на основе решения уравнения (1).

В последние годы широкое применение при численном решении некорректно поставленных задач получили вычислительные схемы, построенные на основе методов регуляризации. Однако предложенные способы выбора параметра регуляризации и подходы к определению ошибок

восстановления часто не учитывают стохастичность физического эксперимента (т. е. шум измерения, а в ряде случаев и входной сигнал являются случайными процессами), что приводит к значениям параметра регуляризации, отличающимся от оптимальной величины, и не позволяет оценить статистические характеристики ошибок восстановления, которые важны при дальнейшей обработке восстановленного сигнала.

В данной работе выводится статистический критерий оптимальности выбора параметра регуляризации, строится итерационная процедура, вычисляющая оптимальное значение параметра регуляризации. Вводится также несколько моделей шума восстановления и приводятся соотношения, позволяющие вычислять статистические характеристики этого шума.

Сделаем ряд вводных замечаний. Исходя из практических соображений, положим, что шум измерения  $n(t)$  является гауссовым случайным процессом, не зависящим от  $y(t)$ , с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $K_{nn}(t)$ , а ядро  $h(t)$  и входной сигнал  $x(t)$  определены соответственно на интервалах  $[0, \tau_n)$ ,  $[0, \tau_x)$ , вне этих интервалов обращаются в нуль и являются функциями с интегрируемым квадратом. Заметим, если шум  $n(t)$  имеет ненулевое математическое ожидание, т. е.  $M[n(t)] = m_n(t)$ , то при переходе к сигналу  $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t) - m_n(t)$  допущение о нулевом среднем шума измерения остается справедливым.

Для решения (1) численными методами обычно вводят конечномерное приближение

$$Hx = y, \quad (2)$$

заменяя функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  на векторы  $x$ ,  $y$  и аппроксимируя интегральный оператор некоторой квадратурной формулой. Для определенности примем, что  $x = \{x(j\Delta_t)\}_{j=0}^{N_x-1}$ ;  $y = \{y(j\Delta_t)\}_{j=0}^{N_y-1}$  — это векторы размерностью  $N_x = \text{ent}[\tau_x/\Delta_t]$ ,  $N_y = \text{ent}[(\tau_x + \tau_n)/\Delta_t]$ ;  $\Delta_t$  — шаг дискретности;  $\text{ent}[z]$  — целая часть числа  $z$ , а  $H = (N_y \times N_x)$  — матрица с элементами  $\{H\}_{kj} = h((k-j)\Delta_t)$ . В качестве решения переопределенной системы (2) при точно заданной правой части рассматривается элемент  $x^+ = (H^T H)^{-1} H^T y$ , в дальнейшем называемый псевдорешением (2). Из-за некорректности исходного уравнения (1) при определении  $x^+$  отсутствует счетная устойчивость по отношению к шуму измерения [1]. Практически, при счете на ЭВМ это выражается в том, что даже при малом уровне шума мы будем получать «пилообразное» псевдорешение, ничего общего не имеющее с истинным. Алгоритм построения псевдорешения становится устойчивым, если на множество решений наложить некоторые дополнительные ограничения в виде априорной информации. В методе статистической регуляризации [2] априорная информация вводится в виде априорного распределения  $p(x)$ . За статистически регуляризованное решение системы (2) принимается математическое ожидание в некотором апостериорном ансамбле с распределением  $p(x/y)$ . Следуя [2], где подробно обсуждается выбор функции априорного распределения, в качестве последней примем функцию

$$p_\alpha(x) = \text{const } \alpha^{N_x/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} \|x\|_{\Gamma^{-1}}^2 \right\}.$$

Здесь  $\|x\|_{\Gamma^{-1}}^2 = (x, \Gamma^{-1}x)$  — квадратичная форма,  $\Gamma^{-1}$  — неотрицательно определенная матрица размерностью  $N_x \times N_x$ ,  $\alpha$  — априори неизвестный параметр регуляризации. Тогда с учетом (2) и предположения о статистических свойствах шума измерения плотность апостериорного распределения имеет вид [2]

$$p(x/y, \alpha) = \text{const } \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|x - x_\alpha\|_{V_\alpha^{-1}}^2 \right\}, \quad (3)$$

а статистически регуляризованное решение определяется из системы алгебраических уравнений порядка

$$(\alpha\Gamma^{-1} + H^T R^{-1} H) x_\alpha = H^T R^{-1} \tilde{y}, \quad (4)$$

где  $R$  — ковариационная матрица вектора шума  $n$  с элементами  $\{R\}_{kj} = K_{nn}((k-j)\Delta_t)$ ,  $\tilde{y} = \{\tilde{y}(j\Delta_t)\}_{j=0}^{N_y-1}$ . Однако решение этой системы при  $N_x > 60-100$  и использовании ЭВМ с небольшой оперативной памятью — трудоемкая вычислительная задача. Поэтому весьма полезным является приведенный ниже вычислительный алгоритм.

**Вычислительный алгоритм нахождения статистически регуляризованного решения  $x_\alpha$ .** Подробно построение этого алгоритма изложено в [3]. Здесь же мы приведем лишь конечные выражения для вычисления  $x_\alpha$  и сделаем сравнение вычислительной эффективности решения системы (4) различными методами.

Согласно этому алгоритму, статистически регуляризованное решение  $x_\alpha$  определяется через  $N$ -мерный ( $N > N_x$ ) вектор  $\tilde{x}_\alpha$ -соотношением

$$\tilde{x}_\alpha(j) = x_\alpha(j), \quad j = \overline{0, N_x-1}, \quad (5)$$

которое справедливо при условии

$$N \geq N_y + N_h + N_R - 2, \quad (6)$$

где  $N_h = \text{ent}[\tau_h/\Delta_t]$ ,  $N_R = \text{ent}[\tau_R/\Delta_t]$ ,  $\tau_R$  — интервал корреляции процесса  $n(t)$ . Процедура нахождения  $\tilde{x}_\alpha$  записывается в виде

$$\tilde{x}_\alpha = W \Psi_\alpha W^{-1} \tilde{y}, \quad (7)$$

где  $W$ ,  $W^{-1}$  — матричные операторы обратного и прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с элементами

$$\{W\}_{kj} = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}(k-1)(j-1)\right\}, \quad \{W^{-1}\}_{kj} = \frac{1}{N} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{N}(k-1)(j-1)\right\}, \\ k, j = \overline{1, N},$$

$i$  — мнимая единица, а  $\Psi_\alpha$  — диагональная матрица

$$\{\Psi_\alpha\}_{(j+1)(j+1)} = \lambda_H(j) / [|\lambda_H(j)|^2 + \alpha \lambda_R(j) / \lambda_\Gamma(j)], \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (8)$$

Последовательности  $\lambda_H$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\lambda_R$  определяются соотношениями:

$$\lambda_H(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}(k) \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}kj\right\}, \quad j = \overline{0, N-1}; \\ \tilde{h}(j) = \begin{cases} h(j\Delta_t) \Delta_t, & j = \overline{0, N_h-1}; \\ 0, & j = \overline{N_h, N-1}; \end{cases} \quad \tilde{y} = \begin{cases} \tilde{y}(j\Delta_t), & j = \overline{0, N_y-1}; \\ 0, & j = \overline{N_y, N-1}; \end{cases} \\ \lambda_R(j) = S_{nn}(j\Delta_\nu) / \Delta_t, \quad j = \overline{0, N/2},$$

при этом  $\lambda_R(N-j) = \lambda_R(j)$ ;  $\lambda_\Gamma(N-j) = \lambda_\Gamma(j)$ ,  $j = \overline{1, N/2}$ . Здесь  $S_{nn}(\nu)$  — спектральная плотность шума измерения,  $\Delta_\nu = 1/(N\Delta_t)$  — шаг дискретизации по частоте. Заметим, что если  $S_{nn}(\nu) > 0$  для  $|\nu| > F_0/2$ ,  $F_0 = 1/\Delta_t$ , то  $\lambda_R$  выражается в виде

$$\lambda_R(j) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=0}^l S_{nn}(j\Delta_\nu + kF_0), \quad j = \overline{0, N/2}.$$

Число  $l$  определяется из условия  $S_{nn}(lF_0) \approx 0$ .

Из (7) следует, что нахождения  $x_\alpha$  можно условно разделить на следующие этапы: 1) вычисление  $N$ -мерного вектора  $\tilde{Y} = W^{-1}\tilde{y}$ ; 2) определение  $N$ -мерного вектора  $X_\alpha = \Psi_\alpha \tilde{Y}$ ; 3)  $\tilde{x}_\alpha = WX_\alpha$ ; 4) вычисление  $x_\alpha$  на основе (5). Подсчитано, что при применении алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) для взятия ДПФ от вещественных последовательностей в (7) требуется (с учетом выбора параметра регуляризации)  $3N(\log_2 N - 1) + N(8 + 4l)$  операций умножения и  $6N(\log_2 N - 1) + N(6 + 2l)$  операций сложения,  $l$  — число итераций при выборе параметра регуляризации. На рис. 1 приведены зависимости числа  $Q$  вычислительных операций, необходимых для решения (4), от размерности  $N_x$  для трех методов: прямых методов линейной алгебры

(требующих примерно  $N_x^3$  операций), метода В. В. Воеводина [4] и процедуры (7) ( $K_H = N_w/N_x$ ). Как видно из рисунка, применение процедуры (7) целесообразно при  $N_x > 10$  и особенно эффективно для  $N_x > 60$ , когда число вычислительных операций уменьшается на  $2 \div 3$  порядка. Использование (7) значительно экономит память ЭВМ. Действительно, при решении системы (4) прямыми методами алгебры необходимо хранить 2 массива длиной  $N_x^2/2$ , а при применении (7) достаточно зарезервировать 4 массива длиной  $N(N \approx (2 \div 3)N_x)$ . Например, если для хранения числовой информации в памяти ЭВМ отведено 2000 ячеек, то в первом случае можно восстановить вектор размерностью 40—45 точек, а во втором случае  $N_x = 160$ —200.

Однако для того чтобы воспользоваться (7), необходимо определить последовательность  $\lambda_\Gamma$ , которая, в свою очередь, определяет матрицу  $\Gamma$  в (4), и параметр регуляризации  $\alpha$ . Вполне естественно желание выбрать  $\lambda_\Gamma$  и  $\alpha$  так, чтобы регуляризирующий оператор  $T_{\alpha,\Gamma} = (\alpha\Gamma^{-1} + N^T R^{-1} N)^{-1} N^T R^{-1}$  минимизировал среднеквадратическую ошибку (СКО) восстановления

$$M [\|x^+ - x_{\alpha(2)}\|^2],$$

где  $x_{(2)} = \left( \sum_{j=0}^{N_x-1} x^2(j) \right)^{1/2}$  — евклидова норма в  $N_x$ -мерном пространстве.

Такой оператор назовем оптимальным регуляризирующим оператором. Можно показать, что существует семейство оптимальных операторов, задаваемое последовательностью  $\lambda_\Gamma$  и  $\alpha$ , удовлетворяющих условию

$$\lambda_\Gamma(j) / (\alpha N) \alpha = |X^+(j)|^2, \quad j = 0, \overline{N/2}, \quad (9)$$

где  $X^+ = W^{-1}x^+ - N$ -мерный вектор коэффициентов ДПФ, определенный по вектору  $\tilde{x}^+ : x^+(j) = \tilde{x}^+(j)$  для  $j = 0, \overline{N_x-1}$  и  $\tilde{x}^+(j) = 0, j = \overline{N_x, N-1}$ . Если  $x(t)$  — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью  $S_{xx}(v)$ , то (9) заменяется условием

$$\lambda_\Gamma(j) / \alpha = S_{xx}(j\Delta_v) / \Delta_v, \quad j = 0, \overline{N/2}. \quad (10)$$

В общем случае информация о спектре восстанавливаемого сигнала отсутствует. Поэтому последовательность  $\lambda_\Gamma$  и параметр  $\alpha$  не могут

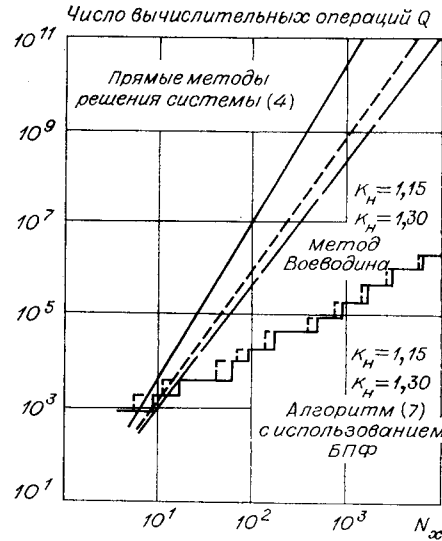


Рис. 1. Эффективность алгоритма регуляризации ( $l=5$ ).

быть определены соотношениями (9), (10). Для преодоления этой трудности предлагается следующий путь. Предположим, что исходя из нижеследующих соображений последовательность  $\lambda_\Gamma$  определена. Необходимо вычислить значение параметра  $\alpha$ , которое бы обеспечило для этой фиксированной последовательности минимум СКО восстановления. Такое значение  $\alpha$  будем называть  $\Gamma$ -оптимальным параметром регуляризации.

**Выбор  $\Gamma$ -оптимального параметра регуляризации** основывается на следующем утверждении.

Если вектор невязки  $e_\alpha = \tilde{y} - Hx_\alpha$  имеет ковариационную матрицу  $D_\alpha = R(R + \alpha^{-1}H\Gamma H^T)^{-1}R$ , то статистически регуляризованное решение  $x_\alpha$  минимизирует СКО восстановления по параметру  $\alpha$  при фиксированной матрице  $\Gamma$ .

Предварительно покажем, что если ковариационная матрица  $D_e = M[e_\alpha e_\alpha^T]$  равна  $D_\alpha$ , то величина  $J_e(\alpha) = M[\|e_\alpha - n\|_{(2)}^2]$  достигает минимума по  $\alpha$ . Справедливо тождество

$$J_e(\alpha) = \text{tr}[D_e - 2R(R + \alpha^{-1}H\Gamma H^T)^{-1}R + R]. \quad (11)$$

По определению  $J_e(\alpha) \geq 0$  для любой неотрицательно определенной матрицы  $\Gamma$  и  $\alpha \geq 0$ . С учетом этого ограничения из (11) следует, что минимум  $J_e(\alpha)$  достигается при матрице  $D_e = D_\alpha = R(R + \alpha^{-1}H\Gamma H^T)^{-1}R$ , которая однозначно определяется параметром  $\alpha$ . Далее, из соотношения  $e_\alpha - n = H(x^+ - x_\alpha)$  вытекает равенство

$$J_e(\alpha) = \text{const } J_\varepsilon(\alpha),$$

где  $J_\varepsilon(\alpha) = M[\|x^+ - x_\alpha\|_{(2)}^2]$  — СКО восстановления, из которого с учетом результата минимизации функционала  $J_e(\alpha)$  следует, что СКО восстановления псевдорешения  $x^+$  достигает минимума по параметру регуляризации, если  $D_e = D_\alpha$ .

Доказанное утверждение может служить критерием оптимальности выбора параметра регуляризации. Действительно, изменяя  $\alpha$ , а следовательно, и  $e_\alpha$ , мы достигаем такого значения  $\alpha_{\text{опт}}$ , при котором  $D_e = D_\alpha = R(R + \alpha^{-1}H\Gamma H^T)^{-1}R$ . Как следует из утверждения, это значение параметра регуляризации является  $\Gamma$ -оптимальным. Для определения  $\alpha_{\text{опт}}$  используются хорошо разработанные методы проверки статистических гипотез. За нулевую гипотезу  $A_0$  принимается предположение  $D_e = D_\alpha$ , а в качестве альтернативной  $A_1 - D_e \neq D_\alpha$ . В работе [3] построен простой алгоритм выбора параметра регуляризации, основанный на проверке гипотезы  $A_0$ . Однако выражение для  $D_\alpha$  было получено из других соображений, не приводящих к оптимальному значению  $\alpha$ . Алгоритм использует теорему [5], утверждающую, что если  $N_z$ -мерный вектор  $z$  с нулевым средним и ковариационной матрицей  $D_z$  распределен нормально, то величина  $z^T D_z^{-1} z$  подчиняется  $\chi^2$ -распределению с  $N_z$  степенями свободы. Согласно этой теореме, следует, что если гипотеза  $A_0$  истинна, то  $\rho_D(\alpha) = e_\alpha^T D_\alpha^{-1} e_\alpha$  подчиняется  $\chi^2$ -распределению с  $N_y$  степенями свободы (нулевое среднее вектора  $e_\alpha$  следует из определения  $x_\alpha$  и свойств вектора шума измерения).

Не повторяя рассуждений, изложенных в [3], приведем лишь конечную запись вычислительной процедуры этого алгоритма, имеющую рекуррентную форму относительно  $\gamma = 1/\alpha$ :

$$\gamma_{m+1} = \gamma_m + \frac{R_D(\gamma_m)}{R'_D(\gamma_m)} \left[ 1 - \frac{R_D(\gamma_m)}{N_y} \right], \quad \gamma_0 \ll 1, \quad (12)$$

где

$$R_D(\gamma) = N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|\tilde{Y}(j)|^2}{\lambda_\Gamma(j) [\gamma \lambda_H(j)]^2 + \lambda_R(j) / \lambda_\Gamma(j)};$$

$$R_D(\gamma) = (-N) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|\bar{Y}(j)|^2 |\lambda_H(j)|^2}{\lambda_\Gamma(j) [\gamma |\lambda_H(j)|^2 + \lambda_R(j)/\lambda_\Gamma(j)]^2}$$

Процесс нахождения  $\alpha=1/\gamma$  прекращается при попадании величины  $R_D(\gamma)$  в интервал

$$\Theta_{N_y}(a) = \left[ \xi_{N_y} \left( \frac{a}{2} \right), \xi_{N_y} \left( 1 - \frac{a}{2} \right) \right],$$

где  $\xi_{N_y} \left( \frac{a}{2} \right) - \frac{a}{2}$  — квантиль  $\chi^2$ -распределения с  $N_y$  степенями свободы, что соответствует принятию гипотезы  $A_0$  с уровнем значимости  $a$ . Процедура (12) имеет максимальную скорость сходимости к  $\Gamma$ -оптимальному значению  $\alpha$ , и обычно число итераций, необходимых для попадания  $R_D(\gamma)$  в интервал  $\Theta_{N_y}(a)$ , не превышает 3—5, и это число не зависит от  $\gamma_0$  и  $N_y$ . Приведенный алгоритм не требует вычисления  $x_\alpha$  и  $e_\alpha$  для каждого значения  $\gamma_i$  ( $i=0, 1, \dots$ ).

Для иллюстрации вышеизложенного на рис. 2 приведены зависимости СКО восстановления от параметра регуляризации и функции  $\rho_D(\alpha) = R_D(1/\alpha)$  для различных уровней шума измерения с  $K_{nn}(t) = \sigma_{nn}^2 \exp\{-\beta|t|\}$ . Как видно из рисунка, значения  $\alpha^*$ , при которых происходит принятие гипотезы  $A_0$ , находятся в области минимума СКО восстановления. К этому следует добавить, что величина  $\alpha^*$  является случайной и может отклоняться от  $\alpha_{opt}$ . Однако, как показали исследования гистограмм распределения  $\alpha^*$ , построенных по результатам решения модельных задач, математическое ожидание  $M[\alpha^*] = \alpha_{opt}$ .

Последнее неизвестное, входящее в матрицу  $\Psi_\alpha$ , — последовательность  $\lambda_\Gamma$  — определяется уточнением по восстановленному элементу  $x_\alpha$ . Структура регуляризующего оператора  $T_{\alpha, \Gamma} = W \Psi_\alpha W^{-1}$  позволяет сделать это. Например, взяв первоначально  $\tilde{\lambda}_\Gamma^{(1)}(j) = |\lambda_H(j)|^2$ ,  $j = \overline{0, N/2}$ , определив  $x_\alpha^{(1)}$ , в качестве последующего приближения примем  $\lambda_\Gamma^{(2)}(j) = M|X_\alpha^{(1)}(j)|^2$ ,  $j = \overline{0, N/2}$ . Такое определение  $\lambda_\Gamma^{(2)}$  следует из (9) и предположения близости  $x_\alpha^{(1)}$  к псевдорешению  $x^+$ . Условие окончания процедуры  $\lambda_\Gamma^{(k+1)}(j) = |X_\alpha^{(k)}(j)|^2$ ,  $j = \overline{0, N/2}$ , может иметь вид  $\|x_\alpha^{(k+1)} - x_\alpha^{(k)}\|_{(2)} < \delta \times \|x_\alpha^{(k)}\|_{(2)}$ , где  $\delta \ll 1$ . Эффективность такого уточнения последовательности  $\lambda_\Gamma$

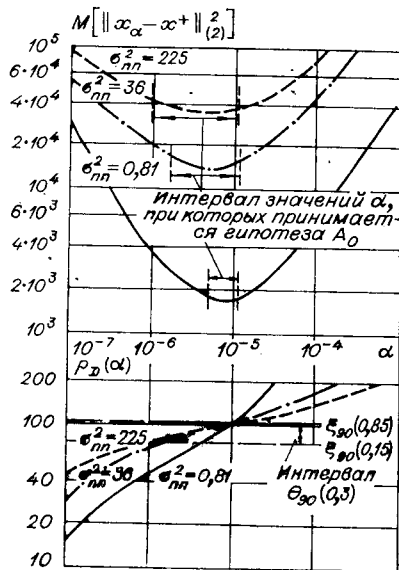


Рис. 2. К выбору  $\Gamma$ -оптимального параметра регуляризации.

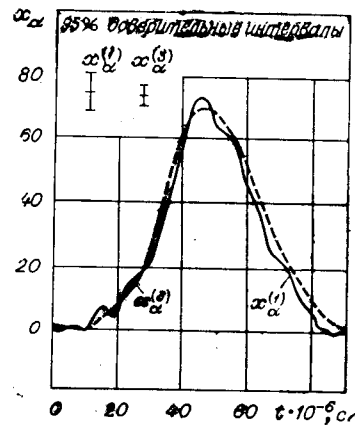


Рис. 3. Статистически регуляризованные решения, построенные по последовательностям  $\lambda_\Gamma^{(1)}$ ,  $\lambda_\Gamma^{(2)}$ .

иллюстрируется рис. 3, на котором приведены регуляризованные решения  $x_\alpha^{(1)}$  и  $x_\alpha^{(3)}$  для функции, характеризующей распределение молекул по скоростям при диагностике газов низкой плотности времяпролетным методом ( $\delta=0,025$ ). Колебания в  $x_\alpha^{(1)}$  обусловлены априорно завышенной шириной спектра  $x(t)$ . Решения  $x_\alpha^{(k)}$ ,  $k=4, 5, \dots$ , уже практически не отличаются от  $x_\alpha^{(3)}$ .

**Ошибки восстановления.** Получение достоверной информации о точности регуляризованного решения не менее важно, чем построение самого решения. В данной работе информация о точности восстановления вектора  $x^+$  носит статистический характер. Для исследования «тонкой» статистической структуры ошибок восстановления рассмотрим  $N_x$ -мерный вектор смещения статистически регуляризованного решения относительно  $x^+$

$$b_\alpha = M[x_\alpha] - x^+ = [(\alpha\Gamma^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} H - I] x^+, \quad (13)$$

характеризующий сглаживание решения, вносимое регуляризирующим оператором, и ковариационную матрицу

$$C_\alpha = (\alpha\Gamma^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} H (\alpha\Gamma^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} \quad (14)$$

размерности  $N_x \times N_x$ , определяющую степень разброса  $x_\alpha$  от  $M[x_\alpha]$ . Однако непосредственное использование (13), (14) при  $N_x > 60$  весьма затруднительно. Для упрощения вычислений этих характеристик, следуя [3], введем  $N$ -мерный вектор  $\underline{b}_\alpha$  и матрицу  $\underline{C}_\alpha$  размерности  $N \times N$ . При выполнении условия (6) справедливо

$$\begin{aligned} b_\alpha(j) &= \underline{b}_\alpha(j), \quad j = \overline{0, N_x - 1}; \\ \{C_\alpha\}_{kj} &= \{\underline{C}_\alpha\}_{kj}, \quad k, j = \overline{1, N_x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вектор  $\underline{b}_\alpha$  вычисляется через ДПФ в виде  $\underline{b}_\alpha = W B_\alpha$ , где  $B_\alpha$  —  $N$ -мерный вектор с проекциями

$$B_\alpha(j) = - \frac{\alpha \lambda_R(j) / \lambda_\Gamma(j)}{|\lambda_H(j)|^2 + \alpha \lambda_R(j) / \lambda_\Gamma(j)} X^+(j), \quad j = \overline{0, N - 1}. \quad (16)$$

Любой  $kj$ -й элемент матрицы  $\underline{C}_\alpha$  определяется как [3]

$$\{C_\alpha\}_{kj} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \lambda_C(l) \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}(k-j)l\right\}, \quad (17)$$

где

$$\lambda_C(l) = \frac{\lambda_R(l) \lambda_H(l)^2}{[|\lambda_H(l)|^2 + \alpha \lambda_R(l) / \lambda_\Gamma(l)]^2}, \quad l = \overline{0, N - 1}, \quad (18)$$

Тогда СКО восстановления выражается соотношением

$$J_\varepsilon(\alpha) = M[\|x^+ - x_\alpha\|_{(2)}^2] = b_\alpha^T b_\alpha + (N_x/N) \sum_{l=0}^{N-1} \lambda_C(l). \quad (19)$$

Единственным затруднением при использовании соотношений (16) является то, что элемент  $x^+$  неизвестен. Поэтому приходится ограничи-

ваться вычислением оценки  $\hat{b}_\alpha$  для вектора смещения, которая определяется по тем же соотношениям (15), (16), что и  $b_\alpha$ , с той лишь разницей, что вместо вектора  $X^+$  используется  $X_\alpha$ . Значение этой оценки позволяет, введя новое статистически регуляризованное решение  $x_\alpha = \hat{x}_\alpha - \hat{b}_\alpha$ , в некоторой степени скомпенсировать вносимое регуляризирующим алгоритмом сглаживание.

Однако знание СКО восстановления часто не удовлетворяет экспериментатора при анализе или сравнении восстановительных кривых. В таких случаях целесообразно элемент  $x_\alpha$  представить в виде  $x_\alpha = x^+ + \varepsilon_\alpha$ , где  $\varepsilon_\alpha$  —  $N_x$ -мерный случайный вектор шума восстановления.

Можно построить следующие представления для статистически регуляризованного решения:

$$x_\alpha = x^+ + b_\alpha + \xi_\alpha^{(1)}; \quad \hat{x}_\alpha \approx x^+ + \xi_\alpha^{(1)}; \quad x_\alpha \approx x^+ + \xi_\alpha^{(2)},$$

что соответствует трем моделям шума восстановления:

$$1) \quad \varepsilon_\alpha^{(1)} = b_\alpha + \xi_\alpha^{(1)}; \quad 2) \quad \varepsilon_\alpha^{(2)} = \xi_\alpha^{(1)}; \quad (3) \quad \varepsilon_\alpha^{(3)} = \xi_\alpha^{(2)}.$$

Заметим, что при построении модели 3 использовалось предположение о принадлежности  $x^+$  к ансамблю с апостериорным распределением (3). Элементы  $\xi_\alpha^{(1)}$ ,  $\xi_\alpha^{(2)}$  являются  $N_x$ -мерными случайными векторами с нулевым средним, ковариационные матрицы которых  $C_\alpha$  и  $V_\alpha$  выражаются соотношением (17), но для матрицы  $V_\alpha$  вместо  $\lambda_c$  используется последовательность  $\lambda_v$  с элементами

$$\lambda_v(j) = \lambda_R(j) / [|\lambda_H(j)|^2 + \alpha \lambda_R(j) / \lambda_\Gamma(j)], \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Числа  $S_c(j) = \lambda_c(j) \Delta_t$ ,  $S_v(j) = \lambda_v(j) \Delta_t$ ,  $j = \overline{0, N/2}$  интерпретируются как оценки для спектральной плотности непрерывных случайных процессов  $\xi_\alpha^{(1)}(t)$ ,  $\xi_\alpha^{(2)}(t)$  в точках  $\nu_j = j \Delta_\nu$ , которые определены по дискретным случайным процессам  $\xi_\alpha^{(1)}(j \Delta_t)$ ,  $\xi_\alpha^{(2)}(j \Delta_t)$ . Вычислив  $S_c(j)$ ,  $S_v(j)$ , можно найти в частотной области интервал, на котором сосредоточен основной спектр ошибки восстановления.

Предложенный в работе подход к вычислению  $b_\alpha$  и ковариационных матриц векторов  $\xi_\alpha^{(1)}$ ,  $\xi_\alpha^{(2)}$ , использующий алгоритм БПФ, дает возможность достаточно просто определить статистические характеристики ошибок восстановления псевдорешения  $x^+$ . Знание этих характеристик позволяет не только построить доверительные области для  $x^+$ , но и вычислить погрешности определения различных интегральных параметров, которые находятся по статистически регуляризованному решению  $x_\alpha$ .

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с выбором параметров регуляризации и касающийся сходимости регуляризованного решения  $x_\alpha$  к  $x^+$  при стремлении ошибок измерения к нулю. Покажем, что алгоритм выбора параметра регуляризации (12) гарантирует сходимость  $x_\alpha$  к  $x^+$  в пространстве со среднеквадратической метрикой, т. е.

$$\lim M [\|x^+ - x_\alpha\|_{(2)}^2] = 0 \quad \text{при} \quad \text{tr}[R] \rightarrow 0.$$

Предварительно заметим, что из  $\text{tr}[R] = (N_y/N) \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_R(j)$  следует  $\lambda_R(j) \rightarrow 0$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ , если  $\text{tr}[R] \rightarrow 0$ . Рассмотрим поведение каждого слагаемого соотношения (19) в отдельности. Непосредственно из (18) вытекает  $\lim (N_x/N) \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_c(j) = 0$  при  $\text{tr}[R] \rightarrow 0$ . Слагаемое  $b_\alpha^T b_\alpha$  может быть



оценено с помощью неравенства  $b_\alpha^T b_\alpha \leq b_\alpha^T b_\alpha = N (B_\alpha)^T B_\alpha$ . Здесь \* — знак комплексного сопряжения.

Покажем справедливость предела  $B_\alpha(j) \rightarrow 0$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ , когда  $tr[R] \rightarrow 0$ , для алгоритма (12). Представим величину  $R_D(\gamma)$  в виде

$$R_D(\gamma) = N \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{\lambda_R(j)} \left( \frac{\lambda_R(j)/\lambda_\Gamma(j)}{\gamma |\lambda_H(j)|^2 + \lambda_R(j)/\lambda_\Gamma(j)} \right) |\tilde{Y}(j)|^2 \right].$$

Для попадания  $R_D(\gamma)$  в интервал  $\Theta_{N_\gamma}$  (а), который не зависит от  $tr[R]$ , необходимо и достаточно постоянно выражения, стоящего в квадратных скобках. Это эквивалентно условию

$$\frac{\lambda_R(j)/\lambda_\Gamma(j)}{\gamma |\lambda_H(j)|^2 + \lambda_R(j)/\lambda_\Gamma(j)} \leq C \lambda_R(j), \quad j = \overline{0, N-1},$$

где константа  $C$  не зависит от  $tr[R]$ . Тогда из (16) следует  $B_\alpha(j) \rightarrow 0$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ , если  $tr[R] \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать. Остается заметить, что из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость  $x_\alpha$  к  $x^+$  по вероятности, т. е.

$$\lim P[|x^+ - x_\alpha| > \varepsilon] = 0, \quad \text{когда } tr[R] \rightarrow 0.$$

#### ВЫВОДЫ

1. Приведенная в работе вычислительная процедура позволяет построить статистически регуляризованное решение при любой корреляционной матрице шума измерения. Это является весьма важным фактором, так как распространенная в работах по статистической регуляризации некорректно поставленных задач модель «белого» шума измерения бывает далека от физической реальности.

2. Выведенный в работе критерий оптимальности и построенная процедура выбора параметра регуляризации гарантируют сходимость регуляризованного решения по вероятности и в среднеквадратическом и приводят к  $\Gamma$ -оптимальному значению параметра регуляризации.

3. В силу симметричности уравнения (1) описанный в работе алгоритм может использоваться для идентификации аппаратной функции линейной стационарной измерительной системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука», 1973.
2. В. Ф. Турчин, В. З. Нозик. Статистическая регуляризация решения некорректных задач. — «Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана», 1969, т. 6, №1.
3. Ю. Е. Воскобойников, Я. Я. Томсон. Восстановление реализаций входных сигналов измерительных систем. — В кн.: Электродиффузионная диагностика турбулентных потоков. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, 1973.
4. В. В. Воеводин. О методе регуляризации. — «Журн. вычислит. мат. и мат. физ.», 1969, № 3.
5. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., Изд-во физ.-мат. лит., 1963.

Поступила в редакцию 1 июля 1974 г.