

МЕТОДЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА  
АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 681.325.3

Г. Е. ЛЕВИН  
(Харьков)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ  
К ПОСТРОЕНИЮ АНАЛОГОВЫХ И АНАЛОГО-ДИСКРЕТНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Во многих задачах идентификации динамических систем и возмущений [1] требуется выполнять операцию дифференцирования сигналов.

При построении дифференцирующих устройств необходимо принимать во внимание некорректность задачи дифференцирования.

В статье изложены два возможных подхода к построению дифференцирующих схем, основанные на теории некорректных задач и понятии «регуляризирующего оператора», введенного А. Н. Тихоновым [2].

Идея решения некорректных задач методом регуляризации состоит в следующем.

Пусть требуется решить уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A$  — непрерывный оператор, действующий из полного метрического пространства  $X$  в область  $R(A) \subset Y$  ( $Y$  — метрическое, но не обязательно полное пространство). Если для каждого элемента  $y$ , входящего в  $R(A)$ , уравнение (1) имеет единственное решение  $x = A^{-1}y$  (оператор  $A^{-1}$  не ограничен), то близким в метрике пространства  $Y$  элементам из  $R(A)$  могут соответствовать сколь угодно различные в метрике пространства  $X$  решения.

Более того, заданный элемент  $y$  может не входить в  $R(A)$ , тогда выражение  $A^{-1}y$  становится вообще бессмысленным.

Метод регуляризации состоит в том, что взамен неограниченного оператора  $A^{-1}$ , определенного лишь на  $R(A)$ , вводится параметрический оператор  $T_\alpha$ , определенный на всем пространстве  $Y$  и удовлетворяющий условиям

$$\text{а) } \|T_\alpha\| < \infty \quad \text{для } \alpha > 0; \quad (2)$$

$$\text{б) } \|x - T_\alpha Ax\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0 \quad \text{для любого} \quad (3)$$

элемента  $x \in X$ .

Для любого элемента  $y \in Y$  приближенное решение уравнения (1) задается формулой

$$x_\alpha = T_\alpha y \quad (4)$$

при некотором фиксированном значении  $\alpha \neq 0$ .

При известной точности  $\varepsilon$  входных данных задачи параметр  $\alpha$  может определяться из условия [2]

$$\|Ax_\alpha - y\| = \varepsilon, \quad (5)$$

смысл которого состоит в том, что точность приближенного решения  $x_\alpha$  должна быть согласована с точностью задания правой части в уравнении (1).

Очевидно, что для каждой конкретной некорректной задачи можно использовать различные методы построения  $T_\alpha$ .

Ниже излагаются два способа регуляризации задачи  $n$ -кратного дифференцирования, специально приспособленные для реализации на аналоговых вычислительных устройствах.

**Первый способ регуляризации.** Для задачи  $n$ -кратного дифференцирования уравнение (1) имеет вид

$$Ax = J^n x = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} x(\tau) d\tau = y(t). \quad (6)$$

В качестве пространств  $X, Y$  выберем  $L_2(0, \infty)$ .

Применяя к уравнению (6) преобразование Лапласа, получаем

$$A(p)x(p) = p^{-n}x(p) = y(p), \quad (7)$$

т. е. передаточная функция для идеального дифференцирующего звена порядка  $n$  равна  $A^{-1}(p) = p^n$ . Такая передаточная функция физически нереализуема.

Введем передаточную функцию  $T_\alpha(p)$ :

$$T_\alpha(p) = \frac{p^n}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_n p^n}, \quad (8)$$

зависящую от  $n$ -мерного параметра  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , и потребуем дополнительно, чтобы нули знаменателя  $T_\alpha(p)$  лежали в левой комплексной полуплоскости.

Передаточная функция (8) определяет оператор  $T_\alpha$  и соответствует устойчивой динамической системе с комплексной частотной характеристикой:

$$T_\alpha(i\omega) = \frac{(i\omega)^n}{1 + \alpha_1(i\omega) + \dots + \alpha_n(i\omega)^n}. \quad (9)$$

Покажем, что построенный оператор  $T_\alpha$  — действительно регуляризирующий.

Используя унитарность преобразования Фурье в пространстве  $L_2$ , получаем

$$\|T_\alpha\| \leq \sup_\omega |T_\alpha(i\omega)| < \infty \text{ при } \alpha > 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|x - T_\alpha Ax\| &\leq \|x\| \sup_\omega \left| 1 - \frac{1}{1 + \alpha_1(i\omega) + \dots + \alpha_n(i\omega)^n} \right| = \\ &= \|x\| \sup_\omega \left| \frac{\alpha_1(i\omega) + \dots + \alpha_n(i\omega)^n}{1 + \alpha_1(i\omega) + \dots + \alpha_n(i\omega)^n} \right| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия (2) и (3) выполнены, следовательно, динамическая система, определяемая передаточной функцией (8), может служить дифференцирующим устройством, приближенно осуществляющим операцию получения производной порядка  $n$  от входного сигнала  $y(t)$ .

Передаточные функции (8) совпадают с передаточными функциями известных дифференцирующих фильтров [3]. Однако имеется

существенное отличие в выборе коэффициентов  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ . В дифференцирующих фильтрах эти коэффициенты выбираются из условий аппроксимации частотной характеристики идеального фильтра, пропускающего лишь частоты, меньшие некоторой фиксированной частоты — «среза»  $\omega_0$ .

С этой целью коэффициенты  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  назначаются так, чтобы знаменатель (8) совпадал с полиномами Баттерворта, Чебышева и т. п.

Такой заранее predetermined выбор коэффициентов не соответствует идее регуляризации, смысл которой состоит именно в возможности свободного варьирования коэффициентами  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  с целью достижения минимума невязки (5).

Известные схемы дифференцирующих фильтров [3], реализующие передаточную функцию типа (8), неудобны тем, что при их реализации производится деление всех коэффициентов  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  на коэффициент  $\alpha_n$  при высшей степени  $p$ . Это обстоятельство затрудняет варьирование коэффициентов на аналоговой машине, поскольку при изменении  $\alpha_n$  приходится заново пересчитывать значения всех остальных коэффициентов.

Помимо этого, при варьировании коэффициентов приходится устремлять  $\alpha_n$  к нулю, при этом числовые значения остальных коэффициентов, набираемых на АВМ, становятся очень большими, что затрудняет их реализацию на серийных машинах.

На рис. 1, а приведена модифицированная схема дифференцирующего фильтра, допускающая независимое варьирование всех коэффициентов, причем ни один из них не превышает единицы. Эта схема отличается от приведенной в [3] введением дополнительной обратной связи с выхода на вход сумматора. Коэффициент  $\alpha_n$  здесь должен быть строго меньше единицы во избежание самовозбуждения схемы. Передаточная функция этой схемы имеет вид

$$T_\alpha(p) = \frac{p^n}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_{n-1} p^{n-1} + (1 - \alpha_n) p^n} \quad (12)$$

По мере приближения коэффициентов  $\alpha_n$  к единице и  $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$  к нулю возрастает предельная частота пропускания фильтра.

Если точность задания входного сигнала  $\epsilon$  заранее известна, то оптимальные величины параметров  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  определяются из условия (5), что легко выполняется на АВМ.

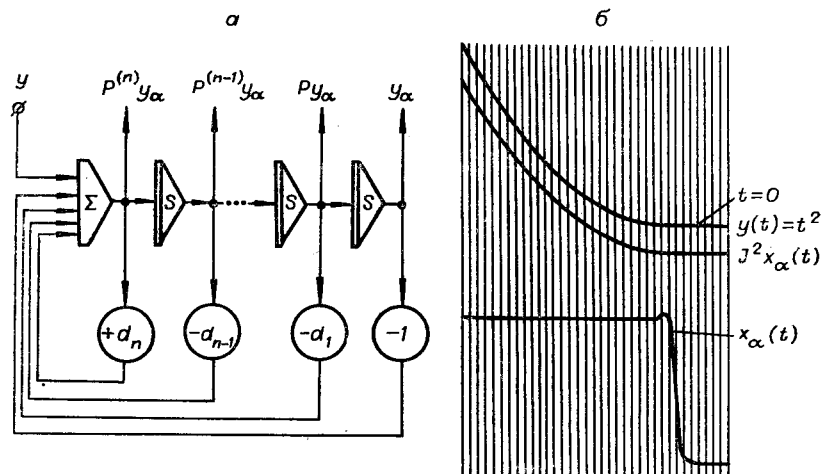


Рис. 1.

Выполненные нами на АВМ «Аналог-1» эксперименты показали, что схема на рис. 1, а имеет значительные преимущества в сравнении со схемой в [3]: при повышении предельной частоты фильтра коэффициенты  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  остаются меньшими единицы, производные на выходе фильтра не содержат множителей, стремящихся к нулю с ростом порядка производной (как это имеет место в схеме [3]); возможность независимого варьирования коэффициентами при условии  $\alpha_n < 1$ ,  $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \rightarrow 0$  повышает точность дифференцирования.

На рис. 1, б приведена осциллограмма, иллюстрирующая двукратное дифференцирование входного сигнала  $y(t) = t^2 (t \geq 0)$ . Как видно, схема на рис. 1, а дает неплохое приближение к истинной производной входного сигнала, а сигнал  $J^2 x_\alpha(t)$  практически повторяет входной сигнал  $y(t)$ .

Заметим, что имеющиеся в [4] схемы дифференциаторов первого порядка являются частным случаем описываемых и их передаточные функции получаются из (8) при  $n=1$ .

Выполненные на АВМ «Аналог-1» эксперименты показали, что целесообразно использовать для получения высших производных последовательное включение дифференциаторов первого порядка, описанных в [4], так как при реализации схемы на рис. 1, а получаются значительно лучшие результаты за счет более широких возможностей в варьировании параметров  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ .

**Второй способ регуляризации.** Этот способ позволяет получить аналого-дискретные дифференцирующие устройства, преобразующие непрерывный входной сигнал  $y(t)$  в дискретные (по времени) значения производной требуемого порядка  $n$ .

Способ основан на представлении оператора  $n$ -кратного дифференцирования в виде свертки:

$$D^n y(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - \tau) y(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где  $\delta^{(n)}(t)$  — производная порядка  $n$  от  $\delta$ -функции Дирака.

Так как ядром этого оператора является сингулярная функция, то он физически нереализуем.

Идея способа состоит в замене сингулярного ядра непрерывным путем регуляризации обобщенной функции  $\delta^{(n)}(t)$ .

Один из методов регуляризации обобщенных функций заключается в сворачивании обобщенной функции с  $\delta$ -образным элементом [3]. Воспользуемся этим методом и обозначим операцию свертки знаком  $*$ .

В качестве такого элемента может быть, например, выбрана функция

$$\delta_\alpha(t) = \begin{cases} k_\alpha \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - t^2}\right), & |t| \leq \alpha; \\ 0, & |t| > \alpha, \end{cases} \quad (14)$$

где константа  $k_\alpha$  выбирается из условия  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(t) dt = 1$ .

Введем оператор  $T_\alpha$  такой, что

$$T_\alpha y = (\delta_\alpha * \delta^{(n)}) * y = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha^{(n)}(t - \tau) y(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где ядро  $\delta_\alpha^{(n)}(t)$  — производная порядка  $n$  от  $\delta$ -образной функции  $\delta_\alpha(t)$  — является финитной бесконечно-дифференцируемой функцией.

Покажем, что введенный оператор  $T_\alpha$  является регуляризирующим для задачи  $n$ -кратного дифференцирования.

Пусть входной сигнал  $y(t)$  принадлежит линейному нормированному пространству  $Y$ , а выходной сигнал  $x(t)$  — линейному нормированному пространству  $X$ .

Зададим в  $X$  и  $Y$  равномерную норму:

$$\|x\| = \max_t |x(t)|; \quad \|y\| = \max_t |y(t)|. \quad (16)$$

Покажем, что оператор (15) является ограниченным при  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned} \|x_\alpha(t)\| &= \max_t |x_\alpha(t)| = \max_t \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha^{(n)}(t-\tau) y(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_t |y(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_\alpha^{(n)}(\xi)| d\xi = M_\alpha \|y\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Но при  $\alpha > 0$  в силу финитности  $\delta_\alpha^{(n)}(t)$  величина  $M_\alpha$  ограничена, следовательно, оператор (15) является ограниченным, и первое требование, предъявляемое к регуляризирующему оператору, выполнено.

Проверим второе требование, а именно:

$$x_\alpha = T_\alpha A x \rightarrow x. \quad (18)$$

$\alpha \rightarrow 0$

Воспользуемся тем, что для непрерывной функции  $x(t)$  ее свертка с любой ограниченной финитной  $\delta$ -образной функцией  $\delta_\alpha(t)$  равномерно сходится к  $x(t)$  на каждом конечном отрезке оси  $t$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

В самом деле, пусть функция  $\delta_\alpha(t)$  покрывается отрезком  $[-\gamma_\alpha, \gamma_\alpha]$  и нормирована так, что  $\int_{-\gamma_\alpha}^{\gamma_\alpha} \delta_\alpha(t) dt = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \max_t |x(t) - (\delta_\alpha * x)(t)| &= \max_t \left| x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(t-\tau) x(\tau) d\tau \right| = \\ &= \max_t \left| \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - x(t-\tau)] \delta_\alpha(\tau) d\tau \right| \leq \max_t \times \\ &\times \max_{-\gamma_\alpha \leq \tau \leq \gamma_\alpha} |x(t) - x(t-\tau)| \int_{-\gamma_\alpha}^{\gamma_\alpha} \delta_\alpha(\tau) d\tau \Rightarrow 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$\alpha \rightarrow 0$

по теореме Кантора о равномерной непрерывности функции на любом конечном замкнутом отрезке оси  $t$ .

Учитывая выражения (6) и (15), а также что оператор  $\frac{d^n}{dt^n}$  является левым обратным к оператору  $A$ , получаем

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= T_\alpha A x(t) = (\delta_\alpha * \delta^{(n)}) * A x = \delta_\alpha * (\delta^{(n)} * A x) = \\ &= \delta_\alpha * \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \delta_\alpha * x \Rightarrow x(t). \end{aligned} \quad (20)$$

$\alpha \rightarrow 0$

Итак, оператор (15) действительно регуляризирующий, причем приближенные («регуляризованные») функции  $x_\alpha(t)$  стремятся при  $\alpha \rightarrow 0$  к истинным производным  $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$  равномерно на любом замкнутом отрезке оси  $t$ .

Описанный выше метод построения оператора (15), аппроксимирующего оператор дифференцирования  $D^n$ , может быть технически реализован на аналоговой вычислительной машине. При этом будут использоваться дифференцирующие устройства, преобразующие непрерывный входной сигнал в дискретные значения производной [5].

Идея реализации такого устройства состоит в следующем.

Известно, что в линейной динамической системе с постоянными коэффициентами решение для произвольного воздействия  $y(t)$  при нулевых начальных условиях имеет вид

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) y(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где  $h(t)$  — реакция системы на воздействие в виде  $\delta$ -функции.

Как видно, интеграл в правой части (21) напоминает выражение для (15).

Если бы удалось построить такую динамическую систему, для которой импульсная переходная функция  $h(t)$  напоминала функции  $\delta^{(n)}(t)$ , то такая система служила бы регуляризованным дифференцирующим устройством. Заметим, что нет никакой необходимости реализовать импульсную переходную функцию в виде производных от (14). Все доказательства остаются в силе для любой другой  $\delta^{(n)}$ -образной финитной функции, так что желательно в качестве последней выбрать функцию, наиболее просто реализуемую на аналоговой машине. В частности, можно использовать для этой цели обычную схему осциллятора без затухания с импульсной переходной функцией

$$h(t) = \begin{cases} \sin \omega t; & t \geq 0; \\ 0; & t < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Конечно, такая функция  $h(t)$  весьма далека от  $\delta'(t)$ , но следует обратить внимание на то, что одна волна синусоиды могла бы служить неплохим  $\delta'$ -образным элементом.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы вырезать из  $h(t)$  (22) одну лишь первую волну функции  $\sin \omega t$ ; для этого достаточно в момент времени  $t_1 = 2\pi/\omega$  остановить осциллятор. В этот момент времени реакция осциллятора будет равна регуляризованному значению производной  $y'(t)$ :

$$y'(t_1) \approx x_\alpha(t_1) = \int_0^{t_1=\alpha} \delta_\alpha(t-\tau) y(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Затем можно вернуть осциллятор в исходное состояние с нулевыми начальными условиями, подать на него воздействие  $y(t)$  и снова остановить через отрезок времени  $\Delta t = \alpha = 2\pi/\omega$  и т. д.

Таким образом, если задать осциллятору автоматический режим работы «Пуск — Остановка — Возврат — Пуск»..., при этом непрерывно подавать на него воздействие  $y(t)$  и в моменты «Остановка» снимать отсчеты, то мы получим в эти моменты времени дискретные значения регуляризованной первой производной воздействия  $y(t)$ .

Если требуется получить вторую производную, то за время режима «Пуск» импульсная переходная функция системы должна быть подобной  $\delta''(t)$ -образной функции. Для этого удобно использовать два осциллятора, выходы которых суммируются.

Таким образом, можно получить и производные более высоких порядков, если для получения импульсной переходной функции использовать  $n$  осцилляторов, суммируя их выходы.

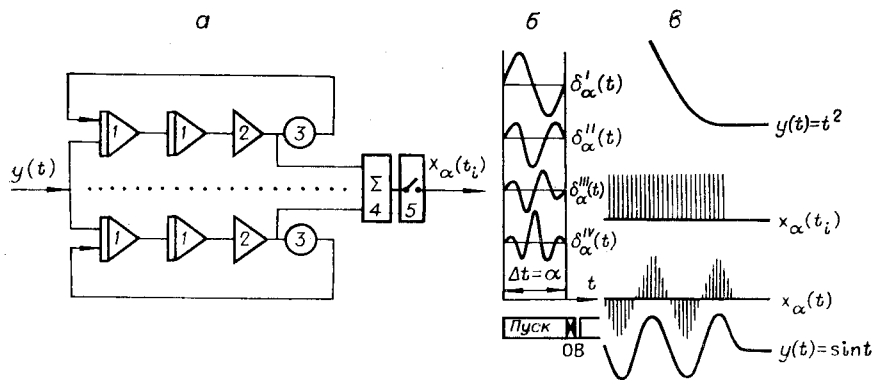


Рис. 2.

Изложенные соображения были проверены экспериментально на машине «Аналог-1».

Схема дифференцирующего устройства для получения дискретных значений производных порядка  $n$  приведена на рис. 2, а.

Она состоит из интеграторов 1, инверторов 2, блоков установки коэффициентов 3, сумматора 4 и релейного элемента 5.

Схема представляет собой линейные осцилляторы без затухания, на входы которых подается входной сигнал  $y(t)$ , выходы осцилляторов суммируются и подаются через релейный элемент 5 на регистрирующее устройство. (На рис. 2, а показаны лишь два осциллятора, точками обозначены остальные  $n - 2$  осциллятора.)

Интеграторы, входящие в схему, работают в периодическом режиме «Пуск — Остановка — Возврат — Пуск»..., причем отсчет дискретных значений производной порядка  $n$  от входного сигнала производится в режиме «Остановка». Для этого релейный элемент 5 имеет проводимость лишь в режиме «Остановка» и не имеет проводимости в остальное время.

Коэффициенты 3 устанавливаются таким образом, чтобы импульсная переходная функция на выходе сумматора за время режима «Пуск» аппроксимировала обобщенную функцию.

На рис. 2, б показаны типичные импульсные переходные функции для получения первой, второй, третьей и четвертой производных.

Для получения таких импульсных переходных функций при настройке устройства на левые интеграторы в схеме рис. 2, а подаются одинаковые начальные условия, устройство вводится в указанный выше периодический режим и изменением коэффициентов 3 устанавливается требуемая импульсная переходная функция. При этом для получения первой производной в схеме устройства достаточно сохранить лишь один осциллятор, для получения производной порядка  $n$  требуется в схеме использовать  $n$  осцилляторов. После настройки требуемой импульсной переходной функции снимают начальные условия с интеграторов, на их входы подается входной сигнал, схема вводится в указанный выше периодический режим и на выходе релейного элемента 5 снимают дискретные значения производной входного сигнала требуемого порядка.

На рис. 2, в показаны результаты работы этого дифференцирующего устройства, построенного для получения второй производной от входного сигнала  $y(t)$  (при этом в схеме на рис. 2, а сохраняются лишь два осциллятора).

В качестве входных сигналов были выбраны функции  $y(t) = t^2$  и  $y(t) = \sin t$ ;  $t > 0$ .

Как видно из рис. 2, в, полученные на выходе дифференцирующего устройства дискретные величины с интервалом  $\Delta t = \alpha$  весьма близки к точным значениям вторых производных от входных сигналов.

Автор выражает благодарность инженерам Н. М. Серяпину и В. Г. Королькову за помощь в проведении экспериментов на АВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Гельфандбейн, Л. В. Колосов. Ретроспективная идентификация возмущений и помех. М., «Советское радио», 1972.
2. А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, 1963, т. 53, № 1.
3. R. N. Kohr. A Method for the Determination of a Differential Equation Model in a Simple Nonlinear Systems.— IEEE Trans. on Electronic Computers, 1963, p. 394.
4. Г. Корн, Т. Корн. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. М., «Мир», 1957.
5. Г. Е. Левин, Н. М. Серяпин, В. Г. Корольков. Дифференцирующее устройство. Автор. свид. № 296 118.— ОИПОТЗ, 1971, № 8.

*Поступила в редакцию 14 июня 1972 г.*

УДК 621.317.76

**О. М. ДОРОНИНА, И. В. КАРПИНЕЦ, А. М. ПЕТУХ**

*(Львов — Винница)*

### **ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРАТОРОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА**

При использовании цифровых интеграторов последовательного переноса в качестве преобразователей кода в частоту на вход декадного делителя интегратора подается последовательность импульсов с постоянной образцовой частотой следования, а на выходе интегратора следуют импульсы со средней частотой, пропорциональной управляющему коду.

Если выходную импульсную последовательность воспринимать как частотно-импульсную, т. е. судить о ней путем подсчета количества импульсов за интервал времени, начало и конец которого совпадают соответственно с началом первого и концом последнего периода частотно-импульсной последовательности, поступающей на вход интегратора, то возможно появление погрешности, вызываемой как дискретным представлением результата счета, так и неравномерностью следования импульсов на выходе.

В [1, 2] описывается аналитический метод определения максимальной погрешности двоичного цифрового интегратора. В данной статье рассматривается более простой и наглядный графический метод, годный для определения максимальных погрешностей цифровых интеграторов последовательного переноса, выполненных в различных кодах.

Поскольку погрешность таких интеграторов вызывается в основном неравномерностью следования импульсов на выходе, то интересен случай, при котором неравномерность их следования будет минимальной.

Из каждых десяти импульсов, поступающих в декадный делитель,